







CALL No. { 51250 / 112 } ACC. NO. 1949  
 AUTHOR 51250  
 TITLE \_\_\_\_\_

URI 112 51250  
10  
51250 1949

Date	No.	Date	No.

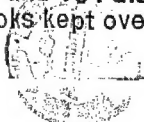
THE BOOK MUS



# MAULANA AZAD LIBRARY ALIGARH MUSLIM UNIVERSITY

## RULES:—

1. The book must be returned on the date stamped above.
2. A fine of **Re. 1-00** per volume per day shall be charged for text-books and **10 Paise** per volume per day for general books kept over - due.







# PLANE TRIGONOMETRY.

FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS

U STACKS WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKI UL LATHI,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC  
SOCIETIES OF ALLYPOUR AND SUBA BEHAR.



18  
51250  
ط الر  
1929  
E-ACCESSION

رسالہ عام مہلک مستوی

مدرسوں اور مکتبوں کے لیے معہ بہت سی مثالوں کے

مولفہ

ڈاکٹر صاحب. ایم. اے. ایف. آر. ایس.

جسکو

مستوی مسجد ذکاء اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بتائید مقاصد

سین آفٹنک سوسائٹی علیحدہ اور سین آفٹنک سوسائٹی صوبہ بہار

آردو میں ترجمہ کیا

اور



مقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی محمد

کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

M.A. LIBRARY, A.M.U.



U1929

RECKED

1929

\*\*\*\*\*

2002



بسم اللہ الرحمن الرحیم

## ویباچہ علم شلت مستوی کا

اس کتاب میں وہ جملہ مسائل موجود ہیں جو اکثر علم شلت مستوی کی کتابوں میں ہوتی ہیں اور  
چہ سو مثالیں شق کے واسطے لکھی ہیں حتی الامکان مبتدیوں کے سمجھنے کے واسطے  
مضامین کے صاف صاف بیان کرینیں سعی اور کوشش کی گئی ہے اور سب مضامین  
اس علم کے وہ بیان کئے گئے ہیں جن کا کام اور ریاضات میں پڑتا ہی اس کتاب کے  
بہت سی باب ہیں اور ہر باب منفہ تمام اور کمال ہے معلم کو اختیار ہے کہ وہ ہر باب کا  
جننا حصہ چاہیں اول طالب علموں کو سکھائیں ہر باب کے آخر میں مثالیں لکھی ہوئی ہیں  
متفرقہ کی چند مثالیں طالب علم اول حل کرے اور باقی کے حل کرینیں وقفہ کر کے  
جو تک اوسکو وقوف اس علم میں پیدا نہ ہو

انڈیا ٹوڈنٹر صاحب کی اصل کتاب اور اوسکی مثالوں کا امتحان علم کے واسطے بہت  
مفید ہے معلوم ہوا کہ علم شلت مستوی کا صحیح صحیح علم جو اوسکی ساری جزئیات پر مبنی  
اس کتاب کے حاصل ہو سکتا ہے اور سوالات کے حل کرینیں اوس علم کو عمل میں طالب علم لگا  
بہت تھوڑی کتاب میں جو اس کتاب سے مساوات کا درجہ رکھتی ہوں - جو کوئی غلطی  
ترجمہ کی مجھ کو بتلایا گیا میں اوسکا ممنون ہو لگا فقط محمد کاظم صاحب مدرسہ نور مل سکول لاہور

# فہرست مضامین

صفحہ

۱

۷

۱۴

۲۲

۴۶

۵۸

۶۰

۶۸

۷۸

۷۹

۱۰۱

۱۱۷

۱۴۳

۱۵۳

۱۶۷

۱۷۹

۱۹۷

—

۱۹۹

۲۰۷

۲۱۷

۲۶۲

۲۶۸

۲۷۷

۳۵۷

زاویوں کی پیمائش انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں  
تقسیمات قوسی زاویہ کا

علم مثلثی نسبتیں  
علامات جبریہ کا استعمال  
زاویے جگہ علم مثلثی نسبتیں معلوم ہیں  
دو زاویوں کے علم مثلثی جگہ

زاویوں کی قیمت کے قوانین  
مسائل مختلفہ

علم مثلثی جدولوں کا بیانات

لوکارشم  
لوکاری اور علم مثلثی جدولوں کا بیان

مسئلہ اجزاء متناسب  
مثلث کے اضلاع اور اس کے زاویوں کے علم مثلثی جملوں کے ارتباطات  
مثلثوں کا حل

ارتفاع اور فاصلوں کی پیمائش

مثلثوں کے خواص  
ساواؤں کے حل زمین زوایا استعمال کے استعمال کی کیفیت اور  
صورقانونیہ جبریہ تو لوکارشم کے قابل بنانے کا حاکم  
معلوم مسئلہ

ضابطہ ڈی موکور  
صورت مفصلہ بعض علم مثلثی جملوں کی  
جب اور جب التمام کی قوت نما قیمتیں  
علم مثلثی سلسلوں کا جمع کرنا  
علم مثلثی جملوں کی تحلیل اجزاء ضربی میں  
جواب

پہلا باب

دوسرا باب

تیسرا باب

چوتھا باب

پانچواں باب

چھٹا باب

ساتواں باب

آٹھواں باب

نواں باب

دسواں باب

گیارہواں باب

بارہواں باب

تیرہواں باب

چودھواں باب

پندرہواں باب

سولہواں باب

سترہواں باب

اٹھارہواں باب

اونیسواں باب

یسواں باب

اکیسواں باب

بائیسواں باب

تیسواں باب

## علم مثلث مستوی

## باب اول

زاویوں کی پیمائش انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں  
 (۱) لفظ ٹریگونو مٹری جس کا ترجمہ ہم علم مثلث کرتے ہیں دو یونانی لفظوں سے مرکب ہے  
 ایک لفظ کے معنی میں مثلث کے اور دوسرے لفظ کے معنی میں پیمائش کرتا ہوں  
 دراصل یہ نام اسی علم کا تھا جس میں کہ مثلثوں کے ضلع اور زاویوں سے باہمی ارتباطات  
 و تعلقات کی تحقیقات ہوتی تھی اور اسکے دو نام تھے اگر سطح مستوی پر مثلث بنایا جاتا  
 تو اسکو علم مثلث مستوی کہتے اور اگر سطح کروئی پر مثلث بنایا جاتا تو اسکو علم مثلث  
 کروئی مگر اب معنی علم مثلث مستوی کے وسیع ہو گئے ہیں اور اس میں وہ ساری تحقیقات  
 جبر یہ داخل ہے جو مستوی زاویوں کے باب میں کیجائی خواہ ان زاویوں کے مثلث بنو یا نہ  
 (۲) اب ہم اول یہ بیان کرتے ہیں کہ زاویوں کا اندازہ کس طرح ہوتا ہے اقلیدس میں  
 زاویہ مستوی مستقیمہ الخٹین کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ دو خط مستقیم باہم ملین مگر ملکر ایک  
 ایک خط مستقیم نہ ہو جائیں تو اوئیں سے ایک خط مستقیم کو جو میلان دوسرے خط  
 مستقیم کے ساتھ ہوتا ہے اسے زاویہ مستوی مستقیمہ الخٹین کہتے ہیں اور جب ایک خط  
 مستقیم دوسرے خط مستقیم پر قائم ہو کر برابر زاویے پہلوئوں میں پیدا کرتا ہے تو ہر ایک  
 زاویہ کو قائمہ کہتے ہیں اب زاویہ قائمہ کو ۹۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا ہے اور اسے  
 نام درجہ رکھا ہے اور ہر اس درجہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کا نام  
 دقیقہ رکھا ہے اور ہر دقیقہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کا نام

رکھا ہے پس سطح زاویہ میں درجوں کی تعداد کے دریافت ہونے سے زاویہ کا اندازہ ہو جاتا ہے اگر زاویہ میں پوری تعداد درجوں کی نہ ہو تو اس کو درجوں اور درجوں کی کسر میں بیان کرتے ہیں اور ہر درجہ کی کسر کی تحویل دقیقوں اور ثانیوں میں کرتے ہیں

(۳) مثلاً نصف زاویہ قائمہ میں ۴۵ درجے ہونگے اور ربع قائمہ میں ۲۲½ درجے اور اس کو اعشاریہ میں ۲۲.۵ درجے لکھ سکتے ہیں اور اس کو ۲۲ درجے ۳ دقیقہ لکھ سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس اگر زاویہ قائمہ کو ۱۶ برابر حصوں میں تقسیم کریں تو ہر ایک حصہ میں ۵ درجے یعنی ۵ درجے ۳ دقیقے ہونگے

(۴) الفاظ درجہ اور دقیقہ اور ثانیہ کے واسطے اختصاراً یہ رموز درجہ کے لیے °

دقیقہ کے لیے ' اور ثانیہ کے لیے " سمجھے جاتے ہیں

(۵) جملہ عملیات میں درجوں اور دقیقوں اور ثانیوں میں زاویوں کے اندازہ کرنے کا

طریقہ اختیار کیا گیا ہے مگر ملک فرانس میں جس زبان کے انداز و زبان اور یونان میں نظم عشری

مروج ہوا تو اس وقت ان زاویوں کے اندازہ کرنے کے واسطے بھی یہ طریقہ اختیار کیا گیا کہ زاویہ

قائمہ کو ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا اور ایک حصہ کا نام گریڈ رکھا اور ہم اس گریڈ کا ترجمہ

فرانسیسی درجہ کرتے ہیں اور پھر اس درجہ کو بھی ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا اور ایک

حصہ کا نام دقیقہ رکھا اور پھر اس دقیقہ کے ۱۰۰ برابر حصے کئے اور ایک حصہ کا نام ثانیہ

رکھا تقسیم کا نام سو سو کی تقسیم ہے اس سبب کہ ہر دفعہ سو برابر حصوں میں تقسیم ہوتی ہے

اور پہلی تقسیم کا نام ساٹھ ساٹھ کی تقسیم ہے اس سبب سے کہ ہر دفعہ ساٹھ برابر حصوں میں

تقسیم ہوتی ہے اور سو سو کی تقسیم کو فرانسیسی ترکیب تقسیم اور ساٹھ ساٹھ کی تقسیم کو

انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں

(۶) اور فرانسیسی درجہ اور دقیقہ اور ثانیہ کے واسطے اختصاراً یہ رموز

ف و ۱۸ مقرر کی گئی ہیں مثلاً ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ فرانسیسی درجے  
 دقیقے میں ۶۰ ۳۰ ۱۵ ۵ ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ فرانسیسی درجے میں ۶۰ ۳۰ ۱۵ ۵  
 تیز کے واسطے فرانسیسی دقیقے اور ثانویوں پر ہندسوں کے اول کھڑے زبرین لگا کر ہر  
 (۷) سو سو کی تقسیم میں اعداد دقیقے اور ثانویوں کے فوراً کسور اعشاریہ میں فرانسیسی درجہ  
 کے تعبیر ہو سکتے ہیں مثلاً ۳۰ دقیقے ۲۰ فرانسیسی درجے یعنی ۶۰ فرانسیسی درجے اور  
 ۳۰ ثانویے (۱۸۰) دقیقے کے یعنی ۳۰۰ فرانسیسی درجہ کے ہیں پس اسے معلوم  
 کہ ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ اس طرح لکھے جائیگے کہ ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ اور چونکہ فرانسیسی درجہ  
 ۱۸۰ وان حصہ زاویہ قائمہ کا ہوتا ہے تو ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ کو ۳۰ ۲۰ ۱۰ ۵ ایک قائمہ کا  
 کہہ سکتے ہیں باوجودیکہ اس سو سو کی تقسیم میں یہ بڑا فائدہ ہو لیکن عملیات میں ساکتہ  
 کی تقسیم مروج ہے اور وجہ اسکی یہ ہے کہ موافق اس تقسیم مروج کے ایک زمانہ دراز سے  
 کتب ریاضیہ میں سیکڑوں حساب لکھے گئے اور ہزاروں جدولین مرتب ہوئیں اگر افسوسناک  
 کو کام میں لائیں تو ان سب کتابوں کو ردی بنائیں اور زاویوں کا نئی طرح سے اندازہ  
 کر نہیں ناخوشی شاقہ اٹھائیں اور تحویل کرتے کرتے تھک جائیں  
 (۸) اب ہم یہ بتلائے ہیں کہ انگریزی اور فرانسیسی ترکیب کے موافق جو ایک ہی زاویہ

کو اعداد تعبیر کریں ان کا آپس میں متبادلہ کس طرح ہوتا ہے  
 فرض کرو کہ ایک زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد کو اور فرانسیسی درجوں کی تعداد کو  
 تعبیر کرتا ہے تو اس سبب کہ زاویہ قائمہ میں ۹۰ درجے ہوتے ہیں ۹۰ زاویہ معلوم اور  
 اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کیا اور اس وجہ سے کہ زاویہ قائمہ میں ۱۰۰ فرانسیسی درجے  
 ہوتے ہیں ۱۰۰ زاویہ معلوم اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کیا

اسے معلوم ہوا کہ  $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   
 اسی واسطے  $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   $\frac{9}{10} = \frac{3}{1}$   
 اور



پس صورت جبریہ  $d = ۴ - ۱ = ۳$  سے یہ قاعدہ مستنبط ہوتا ہے کہ زاویہ میں  
جس قدر فرانسیسی درجے ہوں ان میں سے دسواں حصہ اونکا تفریق کرو پس باقی جو حاصل  
ہوگی وہ تعداد انگریزی درجوں کی اوس زاویہ میں ہوگی اور صورت جبریہ  $d = ۳ + ۱ = ۴$  سے  
یہ قاعدہ استخراج ہوتا ہے کہ کسی زاویہ میں جو تعداد انگریزی درجوں کی ہو اوس پر ایک  
حصہ اوسکا زیادہ کرو تو تعداد فرانسیسی درجوں کی اوس زاویہ میں حاصل ہوگی  
(۹) اب یہ فرض کرو کہ تم تعداد انگریزی دقیقوں کی اور فرانسیسی دقیقوں کی کسی  
ایک زاویہ میں ہو تو اس سبب سے کہ قائمہ میں  $۶۰ \times ۹۰$  انگریزی دقیقے ہوتے ہیں  
 $۶۰ \times ۹۰$  زاویہ معلوم اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کرتا ہے اور اس سبب سے کہ  
 $۱۰۰ \times ۱۰۰$  فرانسیسی دقیقے قائمہ میں ہوتے ہیں  $۱۰۰ \times ۱۰۰$  زاویہ معلوم اور قائمہ کی  
نسبت کو تعبیر کرتا ہے اسلئے

$$\frac{\text{فر}}{۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{۶۰ \times ۹۰}{۱۰۰ \times ۱۰۰}$$

$$\text{اسی واسطے م} = \frac{۶ \times ۹}{۱۰ \times ۱۰} = \text{فر} = \frac{۲۷}{۵۰}$$

$$\text{اور فر} = \frac{۲۷}{۵۰} \text{ م}$$

اور علیٰ ہذا القیاس اگر ص تعداد انگریزی کے ثانیوں اور فرانسیسی ثانیوں کی  
ایک زاویہ میں ہو تو

$$\frac{\text{ص}}{۱۰۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰}{۱۰۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰}$$

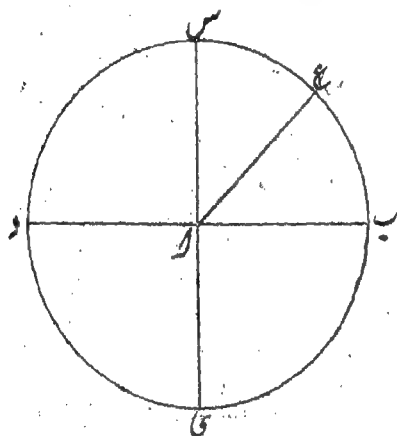
$$\text{اسی واسطے ص} = \frac{۸۱}{۲۵۰} \text{ م}$$

$$\text{م} = \frac{۲۵۰}{۸۱} \text{ ص}$$

(۱۰) اقلیدس میں اکثر زاویہ دو قائمون سے کم ہوتا ہے یہ اکثر کی قید اسلئے  
لگائی گئی ہے کہ کہیں کہیں اقلیدس میں دو قائمون کے بڑے زاویہ کا بھی ذکر آجاتا ہے  
اوس شکل کو دیکھو جہاں یہ لکھا ہے کہ برابر دائروں میں زاویے خواہ مرکزی ہوں

باب اول زاویہ کی پیمائش اگر ذریعہ زاویہ نہ ہو

خواہ محیطی مناسب اپنے قوسوں کے ہوتے ہیں اب یہاں قوس کے مقدار کے واسطے کوئی حد معین نہیں ہے اسلئے زاویہ کی مقدار کے واسطے ہی کوئی حد مقرر نہیں ہے اور جو اقلیدس نے ثبوت لکھا ہے اوسمین لکھا ہے کہ خواہ کچھ ہی اضعا ف زاویہ معلوم کی تو اسلئے یہ اضعا ف جتنی ہم چاہیں بڑی ہو سکتی ہیں (۱۱) ایک دستور ہے کہ علم ثلث کی کتابوں میں یہ لکھا کرتے ہیں کہ زاویوں کے مقدار کے واسطے کسی حد کی قید نہیں



فرض کرو کہ ب و ا ایک خط استقیم ہو اور ایک دوسرے خط اس ای نہیں خط پر زاویہ قائم بنانا اور مقام اب سے ایک خط لے کر د انجام لے کے چکر لگائے تو ب لے منطبق سمت اس پر ہوگا تو زاویہ قائم مرتسم کر لیا اور ب لے سمت لے د پر منطبق ہوگا تو زاویہ دو قائم پیدا کر لیا اور ب لے سمت لے ای پر منطبق ہوگا تو زاویہ تین قائم پیدا کر لیا اور ب لے سمت لے اب پر ہوگا تو زاویہ چار قائم مرتسم کر لیا اور ب لے سمت لے دوسرا چکر شروع کر لیا تو چار قائموں سے بڑا زاویہ بنا لیا پس اگر لے اول چکر میں عین وسط میں اب اور اس کے واقع ہوگا تو زاویہ اب اور لے کے درمیان نصف قائم ہوگا اور اگر لے دوسرے چکر میں عین وسط میں اب اور اس کے واقع ہوگا تو زاویہ ساڑھے چار

قانون کے برابر ہوگا اور سیکر چکر میں زاویہ ساڑھے آٹھ قانون کے برابر ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس  
(۱۲) خطوط مستقیم س ای اور ب ل د متقاطع ہو کر چارے قائمے پیدا کرتے ہیں ب ل اس کو رجبہ  
اول اور س ل د کو رجبہ دوم اور د ای کو رجبہ سوم اور سی ل ب کو رجبہ چہارم کہتے ہیں اب ساکن  
خط ل ب اور متحرک خط ل د کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو اسکو اس طرح بیان کریں گے کہ اگر ل د رجبہ  
اول میں واقع ہے تو زاویہ ب ل د کو رجبہ اول میں کہیں گے اور اگر ل د دوسرے رجبہ میں واقع ہو  
تو زاویہ کو دوسرے رجبہ میں کہیں گے اور علیٰ ہذا القیاس

### مثالین

(۱) دو زاویوں کا تفاوت ۱۰ فرانسیسی درجے اور حاصل جمع ۲۵ انگریزی درجے ہیں ان  
زاویوں کو دریافت کرو

(۲) قائمہ کی دو تہائی کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے انگریزی درجوں کی تعداد کو  
دوسرے حصہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد سے نسبت ۳ اور ۱۰ کی ہو

(۳) نصف قائمہ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی انگریزی درجوں کی تعداد کو دوسرے  
حصہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد سے نسبت ۹ اور ۵ کی ہو

(۴) ۲۵ درجے کے اعشاریہ میں بیان کرو

(۵) ایک زاویہ میں ۱۰ درجے ہیں اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ میں انگریزی

دقیقہ اتنی ہی ہوں جتنے کہ دوسرے حصہ میں فرانسیسی دقیقہ

(۶) اگر زاویہ قائمہ کی ایک تہائی کو زاویوں کے نانے کا پیمانہ واحد مقرر کریں تو ۵۰ کو کو  
عد تبصرہ کریں گے

(۷) جب زاویہ ۶۶ فرانسیسی درجہ کا ۲۰ سے تعبیر ہو تو زاویوں کے نانے کا پیمانہ

واحد میں تعداد درجوں کی دریافت کرو

(۸) دو منظم الاضلاع کی تعداد اضلاع میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہے اور ایک شکل کے ایک

باب دوم میں تعداد فرانسیسی درجوں کی برابر دوسری شکل کے ایک زاویہ انگریزی درجوں کی ہے  
اور زاویوں کو دریافت کرو

(۹) ثابت کرو کہ اگر زاویہ تقسیم فرانسیسی کے موافق ثنائیوں میں تعبیر کیا جا اگر اوسکو  
۳۲۴ میں ضرب دیں تو تحویل اوسکی انگریزی ثنائیوں کی طرف ہو جائیگی

(۱۰) اگر ایک زاویہ میں تعداد فرانسیسی دقیقوں کی وہی ہو جو دوسرے زاویہ میں انگریزی دقیقوں کی ہو  
تو ان زاویوں کا مقابلہ باہم کرو

## باب دوم مقیاس قوسی زاویہ کا

(۱۳) ہم اوپر دو ترکیبیں زاویوں کے اندازہ کرنیکی بتلائیں ایک انگریزی ترکیب در دقیقوں ثنائیوں  
سے دوسرے فرانسیسی ترکیب فرانسیسی در دقیقوں ثنائیوں سے اور یہ بھی ہم لکھا کہ پہلی  
ترکیب عملیات کے حسابوں میں زیادہ تر مروج ہے لیکن ایک اور ترکیب نظریات ریاضیہ میں  
بڑی کجا آمد و اب ہم اوسکا بیان کرتے ہیں اس باب کا مطلب اعظم یہ ہے کہ اول اس دعویٰ  
ثبات کریں اور پھر اوسکو استعمال میں لائیں کہ اگر دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کو مرکز  
کر کے کسی نصف قطر پر دائرہ کھینچیں تو زاویہ درمیانہ خطوط مستقیم کا اوس نسبت سے اندازہ  
ہوگا جو اوس کے محاذی قوس نصف قطر دائرہ سے رکھتی ہو قبل اثبات دعویٰ نے بعض تصدیقات  
کا ثبات کرنا لابد اور ضروری ہونا کو اول لکھتے ہیں اور بعض اوقات بتدی دفعہ ۱۴ کے مقدمہ  
کو تسلیم کر لیتے ہیں اور اوس کے اثبات پر نظر کرتے ہیں اور اس طرح اپنا کام چلا لیتے ہیں

(۱۴) محیط دوائر کے ایسے متغیر ہوتے ہیں جیسے کہ نصف قطر  
فرض کرو کہ ایک دائرہ کا نصف قطر  $q$  اور محیط قطر  $p$  اور دوسرے دائرہ کا نصف قطر  $q'$   
اور محیط قطر  $p'$  ہر دائرہ میں منظم الاضلاع  $n$  اضلاع کی بناؤ اور ہر دائرہ میں دو خطوط  
مرکز سے ایک ضلع کے اطراف میں ملاؤ پس دو مثلث متشابه حاصل ہونگے اور فرض کرو کہ  
ع ایک کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اور  $S$  دوسرے کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع ہو

مقیاس قوسی زاویہ کا

دو ام کے تشابہ ہونے سے اول کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو دوسری کثیر الاضلاع کے ایک ضلع سے وہ نسبت ہوگی جو اول دائرہ کے نصف قطر کو دوسرے دائرہ کے نصف قطر سے

$$\text{اسی واسطے} \quad \frac{ع}{ع} = \frac{نق}{نق}$$

اب فرض کرو کہ ع = قط - لا اور ع = قط - لا پس

$$\text{نق} (\text{قط} - لا) = \text{نق} (\text{قط} - لا)$$

$$\text{اسی واسطے} \quad \text{نق} - \text{قط} = \text{نق} - لا = \text{نق} - لا$$

اب ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ن کو بڑانے سے مجموعہ ضلع کثیر الاضلاع کو اس قدر زیادہ کر سکتے ہیں کہ اوہین اور محیط دائرہ میں فرق جتنا چھوٹے سے چھوٹا ہو جائے پس لا اور لا میں سے ہر ایک کو جتنا چھوٹا جائے چھوٹا کر سکتے ہیں اسی واسطے لا - نق لا کو چھوٹا جتنا چاہیں کر سکتے ہیں اسے معلوم ہوا کہ نق - قط - نق کو صفر بنا سکتے ہیں اسی واسطے کہ اگر اس کی کچھ بہت ہو گا ط تو نق لا - نق لا چھوٹا ط سے نہیں ہو سکتا اور یہ خلاف اوس فرض کے ہو کہ نق لا - نق لا کو جتنا چھوٹا چاہیں کر سکتے ہیں پس

$$\text{نق} - \text{قط} = \text{نق} - لا = 0$$

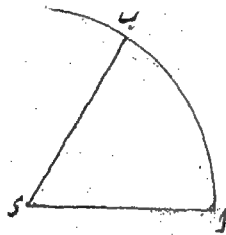
$$\text{اسی واسطے} \quad \frac{\text{قط}}{\text{نق}} = \frac{\text{قط}}{\text{نق}}$$

(۱۵) پس ثابت ہوا کہ نسبت محیط اور نصف قطر کی نسبت معین اور مستقل ہوتی ہو خواہ دائرہ

کی کچھ ہی مقدار ہو اور اسی واسطے نسبت محیط اور قطر کی بھی معین اور مستقل ہوتی ہے نسبت محیط اور قطر کی اعداد میں ٹھیک ٹھیک نہیں تعبیر ہو سکتی مگر ہم آئندہ اس بات کو ثابت کرتے کہ اس نسبت کا حساب تقریباً جانتا جاہیں ہو سکتا ہے نسبت کی تقریباً برابر ۳.۱۴ کے ہے اور اسے ہی زیادہ قریب تر ۳.۱۴۱۵۹۲۶۵ ہے اس عدد کے واسطے رقمہ مقرر کی ہی اوستے ہمیشہ دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت تعبیر ہوتی ہے پس اگر دائرہ کے نصف قطر کو نق تعبیر کرنے تو محیط

$$۳ = ۱۴۱۵۹$$

(۱۶) ہر دائرہ میں زاویہ مرکزی جو اس قوس کے سامنے واقع ہو جس کا طول برابر نصف قطر ہو ہمیشہ ایک ہی مقدار رکھتا ہے

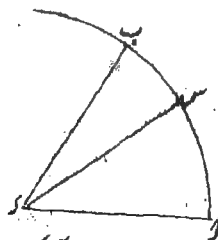


و کے مرکز اور S کے نصف قطر ہر دائرہ کچھ اور اب قوس اس دائرہ کی برابر طول میں نصف قطر کے بناؤ تو اس سبب ہو کہ زاویہ کے دائرہ کے مرکز پر تناسب اپنے قوسوں کے ہوتے ہیں

$$\frac{\text{زاویہ } \angle \text{اب}}{\text{م قاعے}} = \frac{\text{قوس } \angle \text{اب}}{\text{محیط دائرہ}} = \frac{\text{قوس } \angle \text{اب}}{\text{م قاعے}} = \frac{\text{م قاعے}}{\text{م قاعے}} = ۱$$

اسی واسطے زاویہ و اب = ۱ کہہ سکتے ہیں اور وہ مستقل اور معین ہے خواہ نصف پس زاویہ لا اب ایک خاص سرچار قائم کی ہے اور وہ مستقل اور معین ہے خواہ قطر دائرہ کا کچھ ہی ہو

(۱۷) چونکہ زاویہ دائرہ کے مرکز پر محاذی قوس کے جو نصف قطر کے برابر ہے ہمیشہ غیر متغیر ہوتا ہے اسلئے اسکو پیمانہ واحد مقرر کرتے ہیں اور پھر اس زاویہ کی نسبت سوا زاویوں کا اندازہ بتلاتے ہیں



فرض کرو کہ S کوئی زاویہ ہو کہ مرکز مان کر کسی نصف قطر کے برابر ایک دائرہ کچھ اور قوس اب کو طول میں برابر نصف قطر کے بناؤ فرض کرو کہ نصف قطر کو قوس کے

اور طول قوس اس کو ط سے تعبیر کریں

اب چونکہ دائرہ کے مرکزی زاویے متناسب اپنے قوسوں کے ہوتے ہیں

$$\frac{\text{زاویہ } \angle \text{وس}}{\text{زاویہ } \angle \text{اب}} = \frac{\text{اس}}{\text{اب}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

$$\text{اسی واسطے زاویہ } \angle \text{وس} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \times \text{زاویہ } \angle \text{اب}$$

اور اب یہ نتیجہ صحیح ہے خواہ زاویوں کے ناپ کے واسطے کوئی ہی پیمانہ واحد مقرر ہو مگر دو زاویوں کے واسطے ایک ہی پیمانہ ہو اگر زاویہ  $\angle \text{اب}$  کو خود ہی پیمانہ واحد مقرر کریں تو یہ زاویہ واحد سے تعبیر ہو گا اور

$$\text{زاویہ } \angle \text{وس} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

کنندہ

(۱۸) پس ہم نے ثابت کر دیا کہ ہر ایک زاویہ کا اندازہ اس کے ہوتا ہے جس کا شمار تو اس کے سامنے کے قوس ہے اور اس کا نسب نامہ نصف قطر اس دائرہ کا ہی اور یہ قوس

اور نصف قطر اس زاویہ کو خواہ کسی دائرہ کے مرکز پر بنانے سے پیدا ہوں

اور اس طریق سے اندازہ کرنے میں پیمانہ واحد یعنی جو زاویہ اسے تعبیر ہوتا ہے اس کے

سامنے کے قوس برابر نصف قطر کے ہوتی ہے اور ہم نے ثابت کر دیا ہے کہ یہ زاویہ برابر

۱۸۰ قائلہ کے ہوتا ہے اس واسطے تعدد درجوں کی اس زاویہ میں  $\frac{180}{\pi}$  ہے

یعنی اگر ہم قیمت تقریبی مندرجہ دفعہ ۱۸۰ کی کام میں لائیں تو

$$\frac{180}{\pi} = 57.29578 \dots$$

پس یہ تعدد درجوں کی اس

زاویہ میں ہے جو محاذی اس قوس کے واقع ہو کہ برابر نصف قطر کے ہو

(۱۹) پس یہ کس جو قوس تقسیم کی گئی نصف قطر سے ہے اس سے زاویہ کی

مقدار کا تصور ذہن میں دو طریقوں سے پیدا ہوتا ہے مثلاً فرض کرو کہ ایک زاویہ کو

$\frac{1}{2}$  کہیں تو ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم تقیاس قوسی کے پیمانہ واحد کی طرف رجوع کریں

اوسٹین کے ۵ درجے ہوتے ہیں پس اس پیمانہ کی  $\frac{1}{5}$  کے لین دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم پیمانہ واحد کا کچھ خیال نہ کریں بلکہ یوں تصور کریں کہ زاویہ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوس دو تہائی نصف قطر کی ہے

(۲۰) اس کے بعد (کہ قوس تقسیم کی گئی نصف قطر پر) مقیاس قوسی کہتے ہیں اور یہی ہم نے بیان کیا ہے کہ یہ ترکیب زاویوں کے اندازہ کرنیکی نظریات ریاضیہ میں کام آتی ہے اس لئے اسکو ترکیب نظری ہی کہتے ہیں

(۲۱) اگر دائرہ کے نصف قطر کو نق سے تعبیر کریں تو محیط دائرہ ۲۴ نق ہوگا اسے معلوم ہوگا مقیاس قوسی چار قانون کا  $\frac{1}{4}$  یعنی ایک ہے

پس مقیاس قوسی دو قانون کا کہ ہے اور مقیاس قوسی ایک قائمہ کا کہ ہے اور

مقیاس قوسی ۱۸۰ قانون کا کہ ہے جس میں ۱۸۰ صحیح یا کسر ہے

(۲۲) اب ہم یہ بتلائیں کہ مقیاس قوسی کسی زاویہ کا کس طرح اوسے زاویہ کے درجوں سے مربوط ہوتا ہے فرض کرو کہ زاویہ معلوم میں تعداد درجوں کی لے ہے اور اسے زاویہ کا

مقیاس قوسی ہے چونکہ دو قائمے زاویوں میں ۱۸۰ ہوتے ہیں تو زاویہ معلوم اور دو قانون کی نسبت  $\frac{1}{180}$  سے تعبیر ہوتی ہے اور چونکہ مقیاس قوسی دو قانون کا کہ ہے

تو زاویہ معلوم اور دو قانون کی نسبت کو سنہ تعبیر کر لیا پس اسے معلوم ہوگا کہ

$$\frac{1}{180} = \frac{1}{180}$$

$$\frac{1}{180} = \frac{1}{180}$$

$$\frac{1}{180} = \frac{1}{180}$$

(۲۳) مثال مقیاس قوسی ایک درجہ کا کہ ہے اور ۱۸۰ درجہ کا مقیاس قوسی

۱۸۰ کے اور مقیاس قوسی نصف قائمہ کا کہ ہے  $\frac{1}{2}$  ہو اور مقیاس قوسی ایک قصبہ کا کہ ہے اور مقیاس قوسی ایک ثانیہ کا کہ ہے اور علیٰ ہذا المقیاس



اب اگر مقیاس قوسی کسی زاویہ کا  $\frac{1}{10}$  ہے تو تعداد درجوں کی اوس زاویہ میں  $\frac{1}{10}$  ہوگی اگر مقیاس قوسی کسی زاویہ کا  $\frac{1}{10}$  ہے تو تعداد درجوں کی اوس زاویہ میں  $\frac{1}{10}$  ہوگی یعنی

$$10 \times 90 = 900 \text{ ہے اور علیٰ ہذا القیاس}$$

طالب علم کو خوب توجہ ان باتوں پر کرنی چاہئے اور اوسکو ایسی مشق اور عادت ڈالنی چاہئے کہ مقیاس قوسی میں جو زاویہ بیان کیا جائے اوسکو فوراً درجوں میں تحول کر لے میں

(۲۲) اب اس مقیاس قوسی اور فرانسیسی درجوں کی مربوط کرنیکی ترکیب بتلائے

$$\begin{aligned} \frac{\text{کے}}{\text{سکہ}} &= \frac{\text{کے}}{\text{سکہ}} \\ \frac{\text{کے}}{\text{سکہ}} &= \frac{\text{کے}}{\text{سکہ}} \\ \text{اور بر} &= \frac{\text{کے}}{\text{سکہ}} \end{aligned}$$

پس تعداد فرانسیسی درجوں کی مقیاس قوسی کے پیمانہ واحد میں

$$\frac{1}{10} \text{ یعنی } 10 \times 90 = 900 \text{ ہے}$$

(۲۵) دفعہ ۱ میں ثابت کیا ہے

$$\text{زاویہ } 1 \text{ دس } = \frac{1}{10} \text{ زاویہ } 1 \text{ دس}$$

اب بیان کوئی اور بات چاہئے واحد مقیاس قوسی کے لئے اسوا اسکے نہیں فرض کی کہ دونوں زاویوں کا پیمانہ واحد ایک ہی ہے

چونکہ زاویہ ۱ دس غیر متغیر ہے اسلئے زاویہ ۱ دس اور قوس میں تبادلہ مستقیم اور اور زاویہ اور نصف قطر میں تبادلہ معکوس ہے اسیو اسکے ہم کہا کرتے ہیں کہ

$$\text{زاویہ } 1 \text{ دس} = \frac{1}{10} \text{ زاویہ } 1 \text{ دس}$$

باب دوم ۱۳۰  
اسمیں کہ وہ مقدار ہے جو اس کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی قیمت معروف ہو جائے

قوس کے پیمانہ واحد ہوتی ہے اور یہ ہم کو اختیار ہے کہ پیمانہ واحد جو چاہیں مقرر کریں  
مثلاً فرض کرو کہ ہم نصف قائمہ کو پیمانہ واحد مقرر کریں تو ہر کونہیہ منظور ہو گا کہ اسے برابر  
ایکے ہو اور یہ جب ہو گا کہ قوس برابر محیط کے آٹھویں حصہ کے ہو پس

$$\frac{1}{8} \times 2\pi = 1$$

اسی طرح کہ  
پس صورت قانونی

$$\text{زاویہ } \theta \text{ اس } = \frac{\theta}{\text{نصف قطر قوس}}$$

اسے زاویہ کی مقدار کا اندازہ صحیح صحیح اس صورت میں ہوتا ہے کہ پیمانہ واحد نصف قائمہ ہو

### مثالیں

(۱) اگر کسی زاویہ میں دائرہ اور م تعداد درجوں اور فرانسیسی اور مقیاس قوس کی  
احاد کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi}{180} = \frac{1}{90}$$

(۲) ایک دائرہ کا نصف قطر ۱۰ فیٹ ہو اور اس کے ۹۰ درجہ کی قوس کے محاذی مرکز پر  
جو زاویہ ہو گا اس میں تعداد درجوں کی دریافت کرو

(۳) مقیاس قوسی ۶۰ کا دریافت کرو

(۴) تین زاویے ہیں اول زاویہ کا مقیاس قوس دوسرے زاویہ کے مقیاس قوسی  
بقدر کہ کے زیادہ ہے اور مجموعہ دوسرے اور تیسرے زاویہ کا ۹۰ فرانسیسی درجے ہے اور

مجموعہ اول اور دوسرے زاویہ کا ۴۵ درجے ان تینوں زاویوں کو دریافت کرو

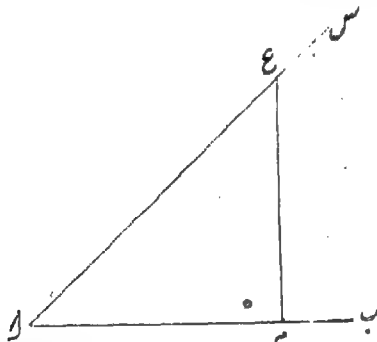
(۵) ایک قائمہ کی بائیں سولہویں حصے کے مقیاس قوسی میں اور درجوں اور درجوں کے  
اعشاریہ میں اور فرانسیسی درجوں اور فرانسیسی درجوں کی اعشاریہ میں تعبیر کرو

(۶) ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب بڑا زاویہ دو چند سب سے چھوٹے زاویہ سے ہو ان زاویوں کے درجے اور فرانسیسی درجے اور قیاس قوسی دریافت کرو

(۷) ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب چھوٹے زاویہ کے درجن کو سب سے بڑے زاویہ کے مقیاس قوسی کے ساتھ نسبت ۶۰ اور کہ کی ہے زاویہ تکو دریافت کرو

### باب سوم علم مثلثی نسبتیں

(۲۶) فرض کرو کہ زاویہ ب اس ہو اس زاویہ کے اضلاع میں کسی ضلع میں کو نقطہ مقرر کرو اور دوسرے ضلع پر اس کے عمود نکالو



مثلاً یہ نقطہ ع کا ضلع اس میں مقرر کرو اور ع م عمود اب پر نکالو اور زاویہ ب اس کو حروف سے تعبیر کرو تو

ع م	یعنی	عمود	کو جیب زاویہ ا کی کہتے ہیں
ا م	یعنی	قاعدہ	کو جیب تمام زاویہ ا کی کہتے ہیں
ع م	یعنی	عمود	کو مماس زاویہ ا کا کہتے ہیں
ا م	یعنی	قاعدہ	کو مماس تمام زاویہ ا کا کہتے ہیں

یعنی  $\frac{دع}{دع}$  وتر  $\frac{دع}{دع}$  کو قاطع الزاویہ زاویہ ا کا کہتے ہیں  
 یعنی  $\frac{دع}{دع}$  وتر عمود کو قاطع التمام زاویہ ا کا کہتے ہیں

اگر زاویہ د کے جیب التمام کو ایک سے تفریق کریں تو حاصل تفریق کو جیب معکوس ا کی کہتے ہیں اگر ایک میں سے جیب ا کی تفریق کریں تو حاصل تفریق کو جیب معکوس التمام ا کی کہتے ہیں جیب معکوس التمام کا استعمال عمل میں شاذ و نادر ہوتا ہے  
 (۲۷) الفاظ جیب اور جیب التمام وغیرہما کا اختصار اکثر کیا جاتا ہے اور ان کو جیب اسطرخ کہتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} \text{جیب ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{س ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{قط ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{جم ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{جم ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{قم ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{ج ا} &= \frac{دع}{دع} \\ \text{جم ا} &= \frac{دع}{دع} \end{aligned}$$

(۲۸) جیب اور جیب التمام اور ماس اور ماس التمام اور قاطع الزاویہ اور قاطع التمام اور جیب معکوس اور جیب معکوس التمام کو علم مثلثی نسبتیں یا علم مثلثی جملے کہتے ہیں علم مثلث کا جز اعظم یہی ہے کہ کسی زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کی خواص اور باہمی ارتباطات کی تحقیقات کریں یہ جملے مثلثی طول نہیں ہیں بلکہ نسبت ایک طول کی دور سے طول کے ساتھ ہے یعنی وہ علم حساب کی اعداد صحیح یا کمور ہیں  
 (۲۹) زاویہ جقدر قائمہ سے کم ہوتا ہے اوس کی کو تمام زاویہ یا تمام زاویہ کی کہتے ہیں

پس اگر زاویہ میں ۱ تعد اور درجہ کی ہو تو ۹۰ - ۱ تعد اور درجہ کی اوس زاویہ کی تمامی ہوتی ہے  
اسے ایک اور ترکیب بعض علم مثلثی نسبتوں کی تعریف کرنیکی یہ نکلتی ہے کہ دفعہ ۲۶ کے  
موافق تعریف جیب اور ماس اور قاطع الزاویہ کی کر کے اب آگے اور تعریفات اس طرح کریں کہ

جیب التمام ایک زاویہ کی اوسکی تمامی کی جیب ہوتی ہے

ماس التمام ایک زاویہ کا اوسکی تمامی کا ماس ہوتا ہے

قاطع التمام ایک زاویہ کا اوسکی تمامی کا قاطع الزاویہ ہوتا ہے

اس واسطے کہ مثلث ۱ ع م میں زاویہ ۱ ع م تمامی زاویہ ۱ کی ہے اور

$$\text{جب } ۱ ع م = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{۱ م}{۱ ع} = \text{جم } ۱$$

$$\text{مس } ۱ ع م = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{۱ م}{۱ ع} = \text{مم } ۱$$

$$\text{قط } ۱ ع م = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{۱ ع}{۱ م} = \text{قم } ۱$$

اور ان نتائج کو اس طرح بھی بیان کر سکتے ہیں کہ

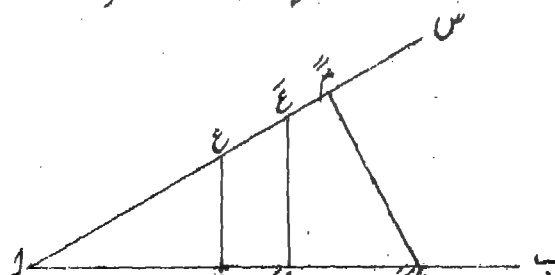
ایک زاویہ کی جیب اوسکی تمامی کے جیب التمام ہوتی ہے

ایک زاویہ کا ماس اوسکی تمامی کا ماس التمام ہوتا ہے

ایک زاویہ کا قاطع الزاویہ اوسکی تمامی کا قاطع التمام ہوتا ہے

(۲۰) جب تک زاویہ نہیں بدلتا اوسکی علم مثلثی نسبتیں نہیں بدلتیں

فرض کرو کہ ۱ اس کوئی زاویہ ہے ۱ م میں کوئی نقطہ ۱ م مقرر کرو اور ۱ م عمود ۱ ب پر نکالو



اور کوئی اور نقطہ ۱ ع م مقرر کر کے ۱ م عمود ۱ ب پر نکالو تو مثلثوں کے تشابہ ہونے سے

یعنی جیب زاویہ  $\angle$  کی وہی سمت ہی خواہ زاویہ مثلث  $\angle$  م سے پیدا ہو خواہ  
 مثلث  $\angle$  م سے اور یہی حال اور کیفیت اور علم مثلثی نسبتوں کی ہے اور  $\angle$  ب میں  $\angle$  ہوی  
 ایک نقطہ فرض کر کے  $\angle$  م عمود اس پر نکالو تو مثلثوں  $\angle$  م اور  $\angle$  م متشابه  
 ہوی اور  $\frac{\angle م}{\angle م} = \frac{\angle م}{\angle م}$

اب ہم بعض ارتباطات علم مثلثی نسبتوں کے بیان کرتے ہیں  
 (۳۱) اب حدود مذکور سے تو یہ نتیجے بالکل عیان ہیں کہ

$$\begin{aligned} \text{مس } \angle م = 1 &= \text{اسیوطے مس } \angle = 1 \text{ اور } \text{مس } \angle = 1 \\ \text{قط } \angle م = 1 &= \text{اسیوطے قط } \angle = 1 \text{ اور } \text{قط } \angle = 1 \\ \text{قم } \angle م = 1 &= \text{اسیوطے قم } \angle = 1 \text{ اور } \text{جب } \angle = 1 \\ \text{اور نیز مس } \angle &= \frac{\angle م}{\angle م} = \frac{\angle م}{\angle م} \div \frac{\angle م}{\angle م} = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{م } \angle &= \frac{\angle م}{\angle م} = \frac{\angle م}{\angle م} \div \frac{\angle م}{\angle م} = \frac{1}{1} = 1 \\ (۳۲) \text{ ثبات کرو کہ } &(\text{جب } \angle) + (\text{حم } \angle) = 1 \end{aligned}$$

مثلث قائم الزاویہ  $\angle$  م میں

$$\begin{aligned} \angle م &= \angle م + \angle م \\ \text{اسیوطے } 1 &= \frac{\angle م + \angle م}{\angle م} \\ \text{اسیوطے } 1 &= \left(\frac{\angle م}{\angle م}\right) + \left(\frac{\angle م}{\angle م}\right) \\ \text{یعنی } (\text{جب } \angle) + (\text{حم } \angle) &= 1 \end{aligned}$$

(۳۳) اثبات مذکور کی نسبت اس بات کا بیان کرنا ضروری ہے کہ  $\angle$  م شام میں ثابت ہوا  
 مثلث قائم الزاویہ کے وتر قائمہ یں جو ملے بنایا جاوے برابر ہوتا ہوں دو مربعوں کے جو اوں اضلاع پر  
 کہ زاویہ قائمہ کے محیط میں بننا جائیں اور یہ بھی معلوم ہے کہ علم ہندسہ میں مربع کسی خط پر  
 کچا جائے تو وہ علم حساب میں اوس عدد کے مربع سے تعبیر ہوتا ہے اور اس خط کا

اندازہ شد کہ پس ان دو متوجہوں کو ملا کر یہ مساوات حسابیہ ملے جو حاصل ہوگی

$$ع م + د م = ۱ ع$$

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہئے کہ (ج ۱) اختصاراً جب د کی طرح لکھا کرتے ہیں اور  
(ج ۲) کی جگہ ج ۱ اور علیٰ نذر القیاس یہی طریقہ اختصار تمام علم مثلثی نسبتوں  
قوار کے واسطے ہر نتیجہ دفعہ ۲ کو اکثر اس طرح لکھا کرتے ہیں  
جب ۱ + ج ۲ = ۱

(۳۴) ثابت کرو کہ

$$(قط ۱) = ۱ + (مس ۱) اور (حم ۱) = ۱ + (حم ۱)$$

ثابت قائم الزاویہ ۱ ع م میں

$$۱ ع = ع م + د م$$

$$۱ ع = ع م + د م$$

$$۱ + (ع م) = (ع م) + ۱$$

$$یعنی (قط ۱) = ۱ + (مس ۱)$$

$$اور چونکہ ۱ ع = ع م + د م$$

$$۱ + (ع م) = (ع م) + ۱$$

$$یعنی (حم ۱) = ۱ + (حم ۱)$$

ان نتائج کو اکثر اس طرح لکھا کرتے ہیں

$$قط ۱ = ۱ + مس ۱ اور حم ۱ = ۱ + حم ۱$$

(۳۵) دفعات ۴۱ - ۴۴ میں جو نتائج ثابت ہوئے ہیں ان کے ہم ہر ایک علم مثلثی نسبت

ایک علم مثلثی نسبت میں بیان کر سکتے ہیں مثلاً نسبتوں کو جب کی ارقام میں بیان کرو

جر ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱

مس ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۲ و ۳۱)

مم ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

قط ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

قم ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

ج ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

یہ ہم سب علم شلتی نسبتوں کو اس کی قیوں میں ہی بیان کر سکتے ہیں

جب ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

جر ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

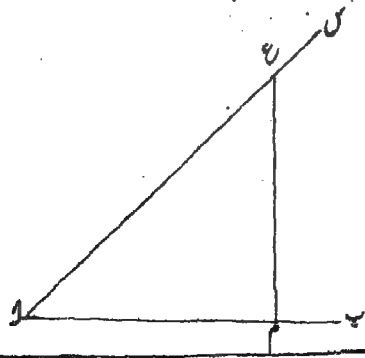
مس ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

قط ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

قم ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

ج ۱ = ۱ - جب ۱ (۱ - جب ۱) = ۱ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

اب ہم خاص زاویوں کی علم شلتی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرتے ہیں  
(۳۶) ۴۵ کے زاویہ کی علم شلتی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو





فرض کرو کہ ب ا د س ایک زاویہ ۹۰ م کا ہو اور ا د س میں کوئی نقطہ ع تقر کر دو اور ع م عمود اب پر نکالو چونکہ ع ا د م نصف قائمہ ہے اسلئے زاویہ ا د ع م بھی نصف قائمہ ہوگا

$$ع م = ا د$$

$$اب \quad ع م + ا د = ا د$$

$$پس \quad ۲ \quad ع م = ا د$$

$$\frac{۱}{۲} = \left( \frac{ع م}{ا د} \right) \quad \text{اسی واسطے}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{ع م}{ا د} \quad \text{اسی واسطے}$$

$$پس جب ۹۰ م = \frac{ع م}{ا د} = \frac{۱}{۲} \quad \text{اور جم ۹۰ م} = \frac{۲}{۱} = \frac{ا د}{ع م}$$

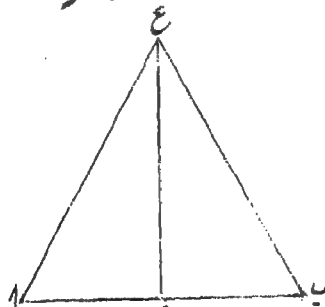
$$مس ۹۰ م = \frac{ا د}{۱} = ا د \quad \text{اور مم ۹۰ م} = \frac{۱}{۲} = \frac{ع م}{ا د}$$

$$قط ۹۰ م = \frac{ا د}{۲} = ا د \quad \text{قم ۹۰ م} = \frac{۱}{۲} = \frac{ع م}{ا د}$$

$$ج ۹۰ م = ۱ - جم ۹۰ م = ۱ - \frac{۱}{۲}$$

(۳۷) ۹۰ اور ۹۰ کی علم شلثی نسبتوں کی قیمتوں کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ا د ب شلث تساوی الاضلاع ہو اور زاویہ ا د ب میں ۹۰ درج ہیں



$$ع م عمود اب پر نکالو تو ا د م = م ب اسی واسطے ا د م = ا ب = \frac{۱}{۲} ا د$$

$$پس جم ۹۰ = \frac{۱}{۲} = \frac{ا د}{۲}$$

$$جب ۹۰ = (۱ - جم ۹۰) = (۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} = \frac{ا د}{۲}$$

$$مس ۹۰ = جم ۹۰ = \frac{۱}{۲} \div \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مس} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}}$$

$$\text{قط} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}}$$

$$\text{جم} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}}$$

$$\text{جج} = 90 = 1 - \text{جم} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}}$$

$$\text{اور جب} = 90 = \text{جم} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}} = \text{جب} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}}$$

$$\text{مس} = 90 = \text{مس} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}} = \text{مس} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}}$$

$$\text{قط} = 90 = \text{قط} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}} = \text{قط} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}}$$

$$\text{جج} = 90 = 1 - \text{جم} = 90 = \frac{1}{\frac{1}{90}} = \frac{1}{\frac{1}{360}}$$

(۳۸) اگر زاویہ ۹۰ سے کم ہو تو جیب تمام زاویہ کی بڑی بہ نسبت جیب کے ہوگی اور اگر زاویہ بڑا ۹۰ سے اوپر چھوٹا ۹۰ سے ہو تو جیب تمام زاویہ چھوٹی بہ نسبت جیب کے ہوگی یہ نتائج مثلث قائمہ کو دفعہ ۲۶ کی شکل دیکھنے سے صاف سمجھ میں آجائے گی کیونکہ مثلث میں بڑا ضلع بڑے زاویہ کے مقابل ہوتا ہے

### مثالین

(۱) ایک خاص زاویہ کی جیب معلوم ہو اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۲) ایک خاص زاویہ کا مس معلوم ہو اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۳) ایک خاص زاویہ کی جیب تمام زاویہ معلوم ہو اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۴) ثابت کرو کہ جیب برس بر + جم بر مم بر + ۲ جب بر جم بر = مس بر + مم بر

(۵) ثابت کرو کہ ۲ (جیب بر + جم بر) - ۳ (جیب بر + جم بر) + ۱ = ۰

ان مساواتوں کو حل کرو

(۶) جیب بر = ۲ جم بر (۷) جب بر + جم بر = ۱

(۸) جم بر = ۲ جم بر (۹) جیب بر - ۲ جم بر + ۱ = ۰

- (۱۰) ۳ قطہ بر ۸ = ۱۰ قطہ بر  
(۱۱) معلوم ہو کہ جب  $\frac{1}{2} = (ب - د)$  اور  $\frac{1}{3} = (ب + د)$  اور ب کو دیا کرو

## باب چہارم

علامات جبریہ کا استعمال

(۹) باب گذشتہ میں ہم نے جو علم مثلثی نسبتوں کی تعریفات کیں اور بعض ارتباطات انہیں باہم قائم کئے اور ہمیں قیذراویہ کے کم از قائم ہونے کی ہمیشہ ملحوظ رہے اب ہم ان تعریفات کو ایسا وسیع کر لکھتے ہیں کہ وہ سب مقدار کے زاویوں پر حاوی ہوں اور انہیں جو ربط یا بھی قائم کریں وہ بھی بر مقدار کے زاویہ کے واسطے ہوں

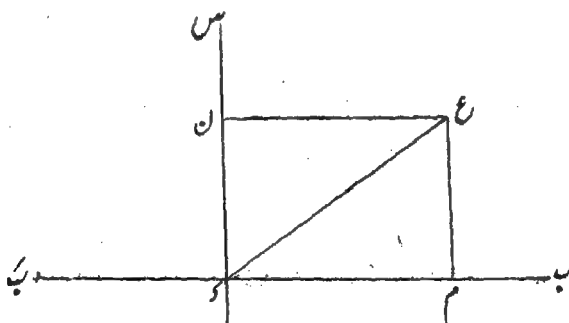
(۱۰) فرض کرو کہ ایک خط معین میں ایک نقطہ معین ہو اور کچھ اس خط پر نقاط اور نقطوں کے بلحاظ نقطہ کے دریافت کرنے ہوں تو مقام ہر نقطہ کا اس خط میں معلوم ہو جائیگا اگر کچھ اس نقطہ کا فاصلہ سے دیر معلوم ہو اور یہ جانتا ہوں کہ وہ کسی جانب میں واقع ہو رہا ہے اس باب میں جب مہندسین نے بالاتفاق یہ بات آسانی کے لئے ٹھہرائی ہے

کہ ۱ سے خط معین پر جو فاصلہ ایک سمت میں اندازہ کے بجائیں اور کو مثبت اعداد تعبیر کریں اور فاصلہ جو اس سمت سے مخالف سمت میں سے اندازہ کے بجائیں اور کو اعداد منفیہ کے تعبیر کریں مثلاً فرض کرو کہ ۱ سے جو دائیں طرف فاصلہ ناپے جائیں وہ مثبت اعداد سے تعبیر ہوتے ہیں اور ۱ سے جبکا فاصلہ ۲ سے یا ۳ سے تعبیر ہوتا ہو نقطہ ۲ کا ۱ سے دوسری جانب میں اگر اتنے فاصلہ پر ہوگا جتنے فاصلہ پر کہ ۱ تھا تو فاصلہ ۱ کا ۱ سے ۲ سے تعبیر ہوگا

(۱۱) ہر ترکیب جو مقام کے معین کرنے کی وسیلہ اعداد جبریہ علامت جبریہ متصرف ہیں اختیار کی گئی ہے اسکو اتفاق چہور کہتے ہیں اور اس اتفاق چہور کے معنی یہ ہیں کہ جو

باب حمام  
علامات جبر کا استعمال

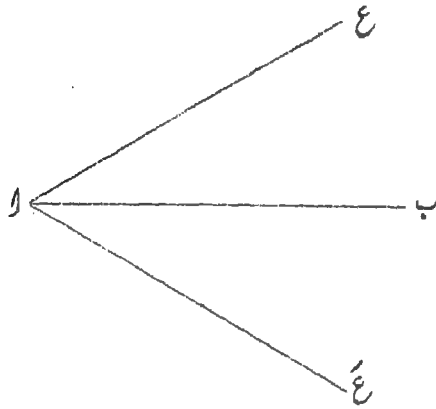
بات اختیار کی گئی ہے وہ جبر نہیں ہے کہ اس طرح اختیار کیا جائے بلکہ فقط اس اختیار پر عمل کرنا  
تسہیل مطلب پر نظر کی گئی ہے سب ابتدائی جبر مقابلوں میں علامت + اور - کی معنی بیان  
ہو کر تے ہیں کہ اس سے مراد اعمال جمع اور تفریق ہیں ابتدائیں تو طالب علم اس سے فقط یہی  
جمع اور تفریق سمجھتا ہے مگر جب آگے بڑھتا ہے تو اس کے اور معنی بھی ان علامتوں کے سمجھنے میں آتے  
لگتے ہیں اور وہ اس بات کو جانتا ہے کہ علامات + اور - سے خواص تقادیر کے  
معلوم ہوتے ہیں اور ان علامتوں کے یہہ ذو معنی لینے سے ایک طرف سے اعمال جمع اور تفریق  
اور دوم خواص تقادیر مفہوم ہوتے ہیں جبر مقابلہ میں کوئی تفضیل یا ترتیبی نہیں پیدا ہوتی بلکہ  
اس سے اور تقویت اس علم جبر مقابلہ کو حاصل ہوتی ہے باب پنجم اور چہارم جبر مقابلہ کو بڑھو  
اس بات کا ہرگز اختیار ہے کہ اس سے دو دستوں کے کسی ایک سمت کو مثبت مقرر کریں مگر  
جب کسی ایک سمت کو مثبت ٹھہرائیں تو ساری تحقیقات میں اس کو مثبت ہی کہہ سکتے ہیں یہ نہ کہ  
کہ کہیں کسی سمت کو مثبت ٹھہرائیں اور پھر اس کو منفی مقرر کریں  
(۴۲) فرض کرو کہ دب اور کس دو خط ہیں جو ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں



ب کو کسی نقطہ تک اور س کو کسی نقطہ تک بڑھاؤ اور فرض کرو کہ ع کو کسی  
نقطہ اسی سطح میں ہے جس میں یہہ دو خط ہیں تو مقام ع کا ہرگز معلوم ہو جائیگا اگر یہ ایک

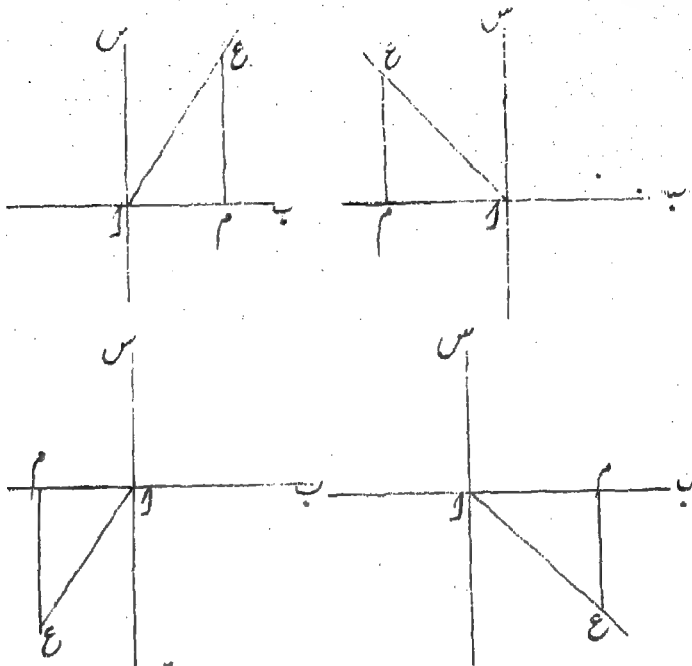
ب ب اور س س سے فاصلہ کا معلوم ہوا یہ بھی معلوم ہو کہ وہ ان خطوں میں سے  
 ہر ایک خط کی کس جانب میں واقع ہو تو ع م اور ع ن عمود خطوط ب ب اور س س پر نکالے  
 اب سب مہندسین نے بالاتفاق یہ باتیں متفرک کیں ہیں کہ اگر ع او پر ب ب کے واقع  
 ہو تو فاصلے کن یا ع م مثبت اعداد کے تعبیر ہوں اور اگر ع نیچے ب ب کے واقع ہو تو وہ فاصلے  
 منفی اعداد سے تعبیر ہوں اور اگر ع دائیں طرف س س کے واقع ہو فاصلے دم یا ع ن  
 مثبت اعداد سے تعبیر ہوں اور اگر ع بائیں طرف س س کے واقع ہوں تو یہ فاصلے منفی  
 اعداد سے تعبیر ہوں

(۷۳) مقدار زاویہ کی نسبت بھی اسی قبیل کا اتفاق جمہور ہے



فرض کرو کہ خط لایع مقام اب سے متحرک ہو اور ایک سمت میں ا کے گرد حرکت کر کے  
 زاویہ ع اب مرقم کرے اور اس زاویہ کو مثبت اعداد سے تعبیر کریں اور اگر خط لایع  
 مقام اب سے گرد ا کے سمت مخالف میں حرکت کر کے زاویہ ع اب پیدا کرے  
 تو اس زاویہ کو منفی اعداد سے تعبیر کریں مثلاً زاویوں ب لایع اور ب لایع  
 میں سے ہر ایک زاویہ ایک تہائی قائمہ کی ہو تو اول زاویہ کو مثبت کسر ۱/۳  
 سے اور دوسرے زاویہ کو منفی کسر - ۱/۳ سے تعبیر کریں گے

(۴۴) اب ہم علم مثلثی نسبتوں کی حدود توسیع کے ساتھ بیان کرتے ہیں



فرض کرو کہ لب اور اس دو خط ایک دوسرے پر زاویے قائم بنائے ہو اور لب سے ایک خط گرد لے کے اس کی جانب میں حرکت کرے اور ذراع کے تمام بیویں پچھلے زاویہ عمود لب پر یا لب محدودہ پر کھجے اور ذراع کو ہمیشہ مثبت سمجھو اگر م اس جانب میں اس کے واقع ہو جس جانب میں مثبت ہے تو لام کو مثبت خیال کرو اور اگر ایسا نہ ہو کہ مخالف جانب میں واقع ہو تو لام کو منفی سمجھو اور اگر ع اسی جانب میں لب کے واقع ہو جس جانب میں مثبت واقع ہے تو ع کو مثبت خیال کرو اور اگر ایسا نہ ہو بلکہ مخالف جانب میں واقع ہو تو ع کو منفی خیال کرو اور فرض کرو کہ زاویہ لب کا اسے تعبیر ہوتا ہو تو

$$\text{جب } \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = 1 \text{ اور } \frac{\text{م}}{\text{م}} = 1 \text{ اور } \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1$$

$$\text{حم } \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = 1 \text{ مم } \frac{\text{م}}{\text{م}} = 1 \text{ قم } \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1$$

$$\text{جج } 1 = 1 \text{ حم } 1 = 1 \text{ اور جحم } 1 = 1 \text{ جب } 1 = 1$$

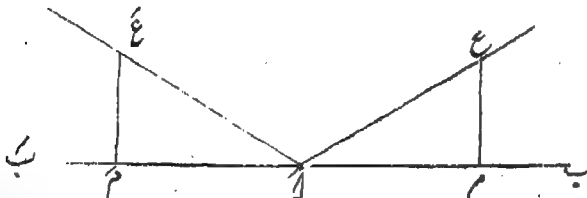
پہلے معلوم ہوا کہ علم مثلثی نسبتیں مثبت منفی اعداد صحیح یا کسور ہوتی ہیں اس پر مثبت  
زاویہ کی خواہ کچھ ہی مقدار ہو اور اس کی علم مثلثی نسبتوں کی تعریف عامہ اب ہوگی اور نیز  
منفی زاویہ کی بھی خواہ کچھ ہی مقدار اور اس کی علم مثلثی نسبتوں کی ہو تعریف عام ہوگی  
اگر اوں اتفاق ٹھہر کر اختیار کریں کہ کسی منفی زاویہ کی علم مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں  
جو اس کے مطابق مثبت زاویہ کی ہوتی ہیں مثلاً آخر شکل میں زاویہ ب و ج کو ہم منفی خیال  
کر سکتے ہیں اور اس کی مقدار کو — کہہ سمجھ سکتے ہیں تو علم مثلثی نسبتیں اس کی وہی ہوں گیں جو  
اوس زاویہ کے علم مثلثی نسبتیں ہیں جو خط متحرک لے کے مثبت سمت میں حرکت کرنے سے  
اور اوس مقام پر پہنچنے سے جو شکل میں بنا ہوا ہے پیدا ہوتا ہے یعنی علم مثلثی نسبتیں  
زاویہ — کی وہی ہوں گیں جو زاویہ + کے — کہہ کی علم مثلثی نسبتیں ہیں  
(۴۵) ان تعریفات سے یہ نتیجہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر دو زاویوں میں تفاوت بقدر چار قانون  
یا اضعاوت چار قانون کے ہو تو دونوں زاویوں کی علم مثلثی نسبتیں ایک ہی ہوں گیں  
(۴۶) زاویے جو قائمہ سے بڑے نہ ہوں ان کے واسطے جو رابطات ذیل ثابت ہوئی ہیں  
وہ عام ہیں زاویوں کی خواہ کچھ ہی مقدار ہو اور خواہ وہ منفی ہوں یا مثبت ہوں  
مس + جرم = ۱ اور قطا + جرم = ۱ اور قمر + جرم = ۱  
مس = ۱ - جرم اور قمر = ۱ - جرم  
جب + جرم = ۱ اور قطا = ۱ - مس اور قمر = ۱ - مس  
اس مساوات

$$\text{جب} + \text{جرم} = ۱$$

سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب ۱ = ± (۱ - جرم) یا جرم = ۱ ± (۱ - جب) (۱ - جب) ۱  
ہر خاص صورت میں اس بات کا فیصلہ ہو سکتا ہے کہ جذر کون سی علامت یعنی جائے  
(۴۷) زاویہ جب قدر دو قانون سے کم ہوتا ہے اس کی کو تکملہ یا مکمل اوس زاویہ کا کہتے ہیں

اگر کسی زاویہ کے درجوں کی تعداد کو تعبیر کر دو تکملہ یا مکمل کی درجوں کی تعداد کو ۱۸۰۔ تعبیر کریگا اگر یہ متباسب قوسی سی زاویہ کا ہو تو کہ۔ بر مقیاس قوسی کے تکملہ کا ہوگا اگر تکملہ کے لفظی تعریف پر خیال کریں تو اس کے معنی محدود یہ ہونگے کہ اصلی زاویہ نسبت ہو اور دو قائمون کے ہونا ہو لیکن اس لفظ کے معنی وسعت کے ساتھ آتے ہیں خواہ کوئی نسبت یا منفی عدد ہو جس زاویہ میں ۱۸۰۔ تعداد درجوں کی ہوگی اس کے تکملہ میں ۱۸۰۔ تعداد درجوں کی ہے اور علیٰ ہذا القیاس برخواہ کچھ ہی ہو زاویہ جسکا متقیاس قوسی کہ۔ ہو

تکملہ اس زاویہ کا کہلائیگا جسکا متقیاس قوسی ہو  
(۴۸) کسی زاویہ اور اس کے تکملہ کی علم شلثی نسبتوں کا متقابلہ کرو  
فرض کرو کہ  $\angle$  ب کوئی زاویہ ہو  $\angle$  ب تک خارج کرو اور زاویہ  
 $\angle$  ب =  $\angle$  ع کے بناء



$\angle$  ع -  $\angle$  ب کے بناء اور  $\angle$  م اور  $\angle$  م عمود  $\angle$  ب پر لگائو  
زاویہ  $\angle$  ب =  $180 - \angle$  ب =  $180 - \angle$  ب پس  $\angle$  ب  
تکملہ  $\angle$  ب کا ہی مثلث  $\angle$  م اور  $\angle$  م علم سندسہ کے موافق سب طے ہے

اب جس میں برابر ہیں  
اب جب  $\angle$  =  $\angle$  اور جب  $(1 - 180) = \angle$   
اور چونکہ  $\angle$  م اور  $\angle$  م متحد المقدار اور متحد العلات ہیں اس واسطے  
جب  $\angle$  = جب  $(1 - 180)$   
اور نیز  $\angle$  =  $\angle$  جم  $(1 - 180) = \angle$



اب د م اور ا م متحد المقدار اور مختلف العلامت ہیں کیونکہ وہ مخالف سمتوں میں اندازہ ہوتے ہیں

$$\text{جم } 1 = - \text{جم } (1 - 180)$$

زاویہ ا کی اور ا و س کی تکرار اور علم مثلثی نسبتوں کا مقابلہ دو طرح سے کر سکتے ہیں ایک تو شکلیں بنا کر دو م ان دو نتیجوں کے جو اوپر حاصل ہوئی ہیں اب ہم اس آخر طرح کو اختیار کرتے ہیں

$$\text{مس } (1 - 180) = \frac{\text{جس } (1 - 180)}{\text{جم } (1 - 180)} = \frac{\text{جس } 1}{\text{جم } 1} = \text{مس } 1$$

$$\text{مم } (1 - 180) = \frac{\text{جما } (1 - 180)}{\text{جبا } (1 - 180)} = \frac{\text{جما } 1}{\text{جبا } 1} = \text{مم } 1$$

$$\text{قط } (1 - 180) = \frac{1}{\text{جم } (1 - 180)} = \frac{1}{\text{جم } 1} = \text{قط } 1$$

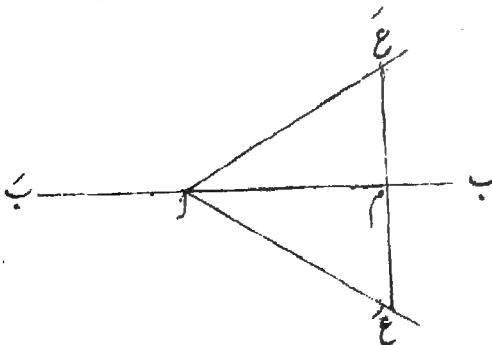
$$\text{قم } (1 - 180) = \frac{\text{جبا } (1 - 180)}{\text{جبا } 1} = \frac{\text{جبا } 1}{\text{جبا } 1} = \text{قم } 1$$

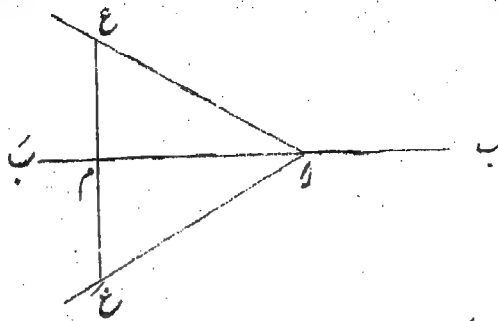
$$\text{ج } (1 - 180) = 1 - \text{جم } (1 - 180) = 1 - \text{جم } 1$$

پس جیب اور قاطع التمام ایک زاویہ کے اور ا و س کے تکرار کے جیب اور قاطع التمام ایک ہی ہیں اور سوا جیب معکوس کے اور باقی علم مثلثی نسبتیں ایک زاویہ کی اور ا و س کے تکرار کی موافق

اپنی اپنی نظیر کے تعداد مساوی ہیں مگر علامت میں مخالف ہیں

$$(۴۹) \text{ ثابت کرو کہ جیب } (1 - 180) = - \text{جیب } 1 \text{ اور جم } (1 - 180) = \text{جم } 1$$





فرض کرو کہ  $\angle$  ب کوئی زاویہ ہو  $\angle$  م عمود  $\angle$  ب پر نکالو اور او سے  $\angle$  تک خارج کرو  
 اور  $\angle$  کو طول میں برابر  $\angle$  م کے بناؤ اور علاؤ  $\angle$  ق تو زاویے  $\angle$  ب اور  $\angle$  ا  
 جو مخالف سمتوں میں  $\angle$  ب کے اندازہ کے جاتے ہیں متحد الکمیت ہیں اور اگر  $\angle$  ب تعمیر کرو  
 تو  $\angle$  ب تغیر ۱- سے ہوگا اور

جب ۱ =  $\frac{\angle}{\angle}$  اور جب (۱-) =  $\frac{\angle}{\angle}$   
 اور  $\angle$  م تعداد میں مساوی  $\angle$  م کے ہر مگر علامت میں مختلف ہر  
 جب (۱-) = - جب ۱

اور نیز جم (۱-) =  $\frac{\angle}{\angle} = \frac{\angle}{\angle} = \text{جم}$   
 اور علاوہ اسکے مس (۱-) =  $\frac{\text{جم}}{\text{جم}} = \frac{(۱-)}{(۱-)} = \frac{\text{جب}}{\text{جم}} = \text{مس}$

مس (۱-) =  $\frac{\text{جم}}{\text{جب}} = \frac{(۱-)}{(۱-)} = \frac{\text{جم}}{\text{جم}} = \text{مس}$

قط (۱-) =  $\frac{\text{جم}}{\text{جم}} = \frac{(۱-)}{(۱-)} = \frac{\text{جم}}{\text{جم}} = \text{قط}$

قم (۱-) =  $\frac{\text{جب}}{\text{جب}} = \frac{(۱-)}{(۱-)} = \frac{\text{جب}}{\text{جب}} = \text{قم}$

جع (۱-) = (۱-) = ۱ - جم = ۱ - جم = ۱ - جع

(۵۰) ثبات کرو کہ جب (۱+۱۸۰) = جب ۱ اور جم (۱+۱۸۰) = - جم ۱  
 فرض کرو کہ  $\angle$  ب کوئی زاویہ ہو اور  $\angle$  کو  $\angle$  تک خارج کرو اور  $\angle$  کو برابر طول  
 میں  $\angle$  کے بناؤ اور  $\angle$  م اور  $\angle$  م کو عمود  $\angle$  ب پر نکالو پس اگر  $\angle$  ب کو

۱ سے تعبیر کریں تو زاویہ  $\angle$  ب کو اوس سمت میں  $180^\circ + 1$  سے تعبیر کریں  
 مثلث  $\triangle$  اور  $\triangle$   $\angle$  م علم ہندسہ کے موافق سب طرح سے آپس میں برابر ہیں  
 اور جب  $\angle = \frac{1}{180} \angle$  اور جب  $(1 + 180) = \frac{1}{180} \angle$   
 جم  $\angle = \frac{1}{180} \angle$  اور جم  $(1 + 180) = \frac{1}{180} \angle$   
 اب  $\angle$  م اور  $\angle$  م متحد المقدار اور مختلف العلامت ہیں اور  $\angle$  م متحد المقدار  
 مختلف العلامت ہیں بس

جب  $(1 + 180) = \angle$  اور جم  $(1 + 180) = - \angle$   
 اور مس  $(1 + 180) = \frac{\angle}{\text{جم}} = \frac{\angle}{(1 + 180)} = \text{مس}$   
 مس  $(1 + 180) = \frac{\text{جم}}{\angle} = \frac{(1 + 180)}{\angle} = \text{مس}$   
 اور علیٰ ہذا القیاس قط  $(1 + 180) = - \angle$  اور ق  $(1 + 180) = - \angle$   
 ان اصولی نتائج کو ایک اور طریقہ سے بھی اس طرح لکھ سکتے ہیں  
 جب  $\angle = - \angle$  جب  $(180 - 1) = \angle$  جم  $(1 - 180) = \angle$   
 (۵۱) دفعات ۷۸ و ۷۹ و ۸۰ کے نتائج صحیح ہیں خواہ مقدار زاویہ  $\angle$  کی کچھ ہوا  
 مثبت ہو یا منفی ہوں باتوں کو طالب علم خوب غور سے خیال کرے  
 اول دفعہ ۷۹ میں  $\angle$  کی خواہ کچھ ہی مقدار ہو اور وہ مثبت ہو یا منفی ہو ہمیشہ خط  $\angle$  م  $\angle$  ایک خط  
 مستقیم ہوتا ہے اور نقاط  $\angle$  اور  $\angle$  برابر فاصلہ پر م سے مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں اور  
 زاویہ  $\angle$  ب اور  $\angle$  ب متحد الکیت ہونگے مگر علامت میں مختلف ہونگے پس دفعہ ۷۹  
 کے نتیجہ کو ایک کلیہ سمجھنا چاہئے دوم دفعہ ۸۰ میں اصلی باتیں اثبات کی یہ ہیں کہ  $\angle$  م اور  
 برابر فاصلہ پر  $\angle$  سے مخالف سمتوں میں ہوں اور  $\angle$  اور  $\angle$  برابر فاصلہ پر خط  $\angle$  ب سے  
 ہوں اور مخالف سمت میں ہوں اور شکل سے معلوم ہوتا ہے کہ اصلی باتیں ہمیشہ سچ  
 حاصل ہو سکتی ہیں اگر  $\angle$  ب کوئی مثبت زاویہ ہو تو اوس زاویہ  $180^\circ$  کا زیادہ کرنا

باب خام ۳۱ علامات حریہ کا استعمال

وہ زاویہ حاصل ہوتا ہے جو اب اور لغ کے درمیان واقع ہو اگر غ اب کوئی کسی زاویہ ہو تو اس پر زاویہ ۱۸۰ کو زیادہ کرنے سے وہ زاویہ حاصل ہوتا ہے جو درمیان لغ اور اب کے واقع ہو پس اسے دفعہ ۵۰ کے کلیہ ہونیکا ہمو یقین واقع ہو گیا

دفعات ۴۹ اور ۴۰ پر دفعہ ۴۸ کا کلیہ ہونا موقوف ہو اس واسطے کہ

جب ۱ = - جب (۱ - ۱۸۰) بوجہ دفعہ ۵۰ کے - ایک کلیہ ہو

جب (۱ - ۱۸۰) = - جب (۱۸۰ - ۱) بوجہ دفعہ ۴۹ کے بہرہ ایک کلیہ ہے  
اسی واسطے بالعموم جب ۱ = - جب (۱۸۰ - ۱)

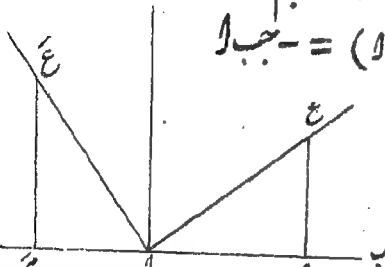
اور ہر جم ۱ = - جم (۱۸۰ - ۱) بوجہ دفعہ ۵۰ کے کلیہ ہے

جم (۱۸۰ - ۱) = - جم (۱ - ۱۸۰) بوجہ دفعہ ۴۹ کے کلیہ ہے

اسی واسطے جم ۱ = - جم (۱ - ۱۸۰) کلیہ ہے

(۵۲) ثابت کرو کہ جب (۱ + ۹۰) = جم ۱

اور جم (۱ + ۹۰) = - جب ۱



فرض کرو کہ غ اب کوئی زاویہ ہو اور لغ کے زاویے قائم لغ پر بنا ہوا اور اس طرح سے واقع ہو کہ خط متحرک زاویہ قائم میں مثبت سمت میں گردش کر کے حرکت کر کے مقام لغ مقام لغ پر پہنچے پس اگر غ اب کو اسے تعبیر کریں

تو ۹۰ + ۱ سے غ اب تعبیر ہوگا لغ = لغ کے بناؤ اور غ م اور غ م عمود  
ب اب پر نکالو تو زاویہ غ م علم ہندسہ کے موافق زاویہ لغ م کے ہو اور مثلث غ م

اور غ م علم ہندسہ میں سب طرح سے آبسین برابر ہیں اور

جب (۱ + ۹۰) = غ م اور جم ۱ = غ م

اب  $\frac{ع}{م}$  اور  $\frac{م}{ل}$  متحد الکسیت اور موجب دفعہ ۴۲ کے تحت العلامت ہیں پس

$$\text{جب } (1 + \frac{9}{10}) = \text{جم } 1$$

$$\text{جم } (1 + \frac{9}{10}) = \frac{10}{10} \text{ اور جب } 1 = \frac{ع}{ل}$$

اب  $\frac{ل}{م}$  اور  $\frac{م}{ع}$  متحد الکسیت ہیں لیکن موجب دفعہ ۴۲ کے مختلف العلامت ہیں

$$\text{پس جم } (1 + \frac{9}{10}) = - \text{جب } 1$$

(۵۳) اب یہ ثابت کرتے ہیں کہ دفعہ گذشتہ کا دعویٰ سب خبریات پر حاوی ہے اور ایک کلیہ ہے

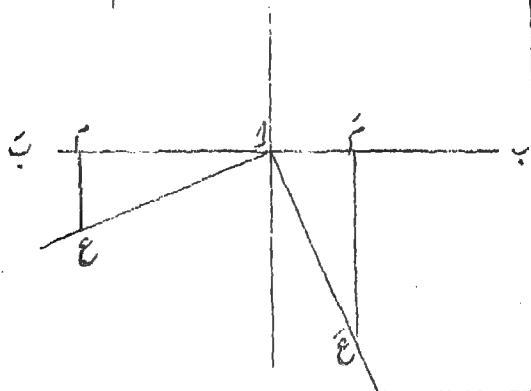
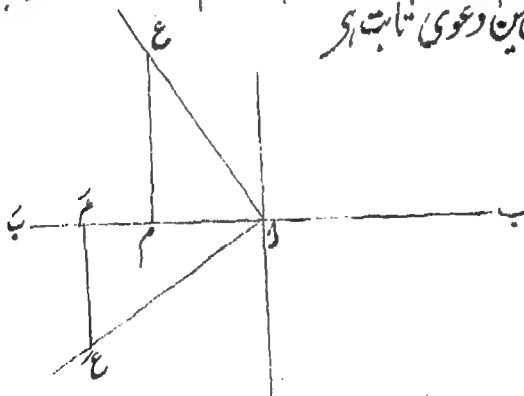
اور اسکی مختلف صورتوں کا امتحان کرتے ہیں دفعہ گذشتہ کی شکل میں فرض کرو کہ  $\frac{ل}{م}$  ایک مثبت

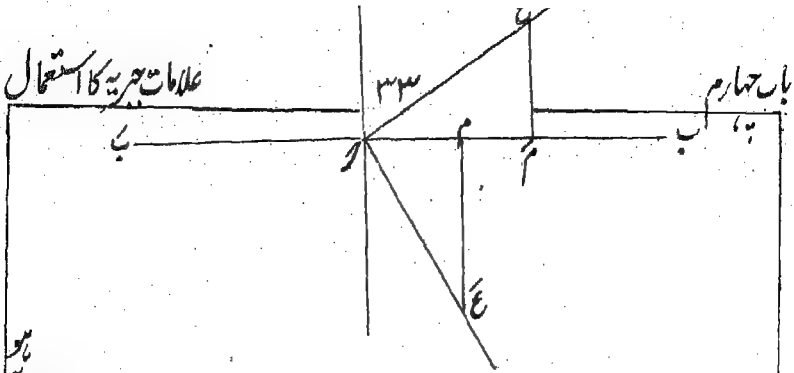
زاویہ اول ربع میں واقع ہے چنانچہ تینوں شکلوں میں زاویہ دوم و سوم و چہارم ربع میں جدا جدا واقع

ہر ایک صورت میں مثلث  $\frac{ع}{م}$  اور  $\frac{م}{ل}$  علم ہندسہ کے موافق سب طرح سے آپس میں برابر ہیں

اور  $\frac{ع}{م}$  اور  $\frac{م}{ل}$  متحد العلامت ہیں اور  $\frac{م}{ل}$  اور  $\frac{ع}{م}$  مختلف العلامت ہیں پس اگر  $\frac{ل}{م}$  مثبت ہو

تو سب صورتوں میں دعویٰ ثابت ہے





اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کی چاروں شکلوں سے دعویٰ اوس صورت میں ہی ثابت ہو سکتا ہے کہ منفی زاویہ  
آخر شکل میں زاویہ ۱۰ درمیان ۹۰ - اور کے درمیان واقع ہے اور تیسری شکل میں زاویہ ۱۰ -  
۹۰ - اور ۱۸۰ کے درمیان واقع ہے اور دوسری شکل میں زاویہ ۱۸۰ - اور  
۲۷۰ کے درمیان واقع ہے اور اول شکل میں زاویہ ۲۷۰ - اور ۳۶۰ کے  
درمیان واقع ہے

(۵۴) اگر کسی زاویہ میں قعر اور درجوں ۱۰ ہو تو زاویہ ۹۰ - کو تمامی زاویہ ۱ کی کہتے ہیں  
پس کہے - بر مقیاس قوسی اوس زاویہ کی تمامی کا ہے جس کا مقیاس قوسی بڑے دفعہ  
۲۹ میں زاویہ کی تمامی کا ذکر اوس صورت میں کہ زاویہ مثبت قائمہ سے کم ہو گیا ہے اگر اب  
یہ قید قائمہ سے کم ہونے کی اور مثبت ہونے کی نہیں - بیگی اب ہم ان دعویٰ کو اس طرح ثابت  
کرتے ہیں کہ وہ سب جزئیات پر محیط ہوں جب ایک زاویہ کی برابر تمامی کے جیب التمام کے  
ہوتی ہے اور جیب التمام ایک زاویہ کی برابر اوسکی تمامی کی جیب کے ہوتی ہے دفعات ۵۲ اور  
۵۳ کی مختلف صورتوں کو امتحان کرنے سے یہ دعویٰ کلیتاً ثابت ہوتے ہیں اور وہ اول  
نتیجہ سے جو ایک ثابت ہوئی ہیں مستنبط ہو سکے ہیں  
شکل ۱ میں ثابت کیا ہے کہ

$$\begin{aligned} \text{جب } (1 + 90) &= \text{جم } 1 \text{ بوجب دفعہ ۵۲ و ۵۳ کے ایک کلیہ ہے} \\ \text{جب } (1 + 90) &= \text{جم } (180 - 90) \text{ بوجب دفعہ ۵۴ کے ایک کلیہ ہے} \\ \text{اس طرح جب } (1 - 90) &= \text{جم } 1 \text{ کلیہ ہے} \end{aligned}$$

پہلے اگر  $90 - 1 = 1$  کے فرض کریں تو  $90 - 1 = 1$  پس

جب  $1 = 90 - 1$  جم یہ کلیہ ہے

(۵۵) سب زاویوں کی علم مثلثی نسبتوں کو ہم قارئ سے کم ثبت زاویہ کی قیوں میں بیان

اسو اس کے کہ اول تو ہم ان صورت قانونیہ جب  $(1 - 1) = 1$  اور جب  $(1 - 1) = 1$  جم

اور ان نتائج سے جو ان سے دفعہ ۴۴ میں مستنبط کر کے لکھی تھیں زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کو

مطابق ثبت زاویوں کی علم مثلثی نسبتوں میں تعبیر کر سکتے ہیں اس کے اگر ہم چاہیں تو صرف

زاویوں ہی پر خیال کریں دفعہ ۵۴ کے موافق چار قارئ کے اضعاف کو ہم سا قارئ کر سکتے ہیں

اسو اس کے جو زاویہ ہو اوہ میں ان اضعاف کو سا قارئ کر کے زاویہ کو کم اجزاء بنا سکتے ہیں

اور یہ موجب دفعہ ۵۰ کے جب  $(1 + 180) = 1$  اور جب  $(1 + 180) = 1$  جم

سے اس زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کا موقوف علیہ بنا سکتے ہیں جو دو قارئوں سے زائد نہ ہو

اور یہ موجب دفعہ ۴۸ کے صورت قانونیہ جب  $(1 - 180) = 1$  اور جب  $(1 - 180) = 1$  جم

جم  $(1 - 180) = 1$  جم ان کے نتائج مستنبط سے ہر زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کو

اس زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کا موقوف علیہ بنا سکتے ہیں کہ قارئ سے بڑا نہ ہو مثلاً

جب  $900 = 900 + 270 = 270$  جب  $270 = 900 + 270 = 900$  جب

س  $(1000 - 1000) = 1000$  س  $(270 + 270) = 1000$  س  $180$

$= 180 + 180 = 180$  س  $180 = 180 - 180 = 180$  س  $180$

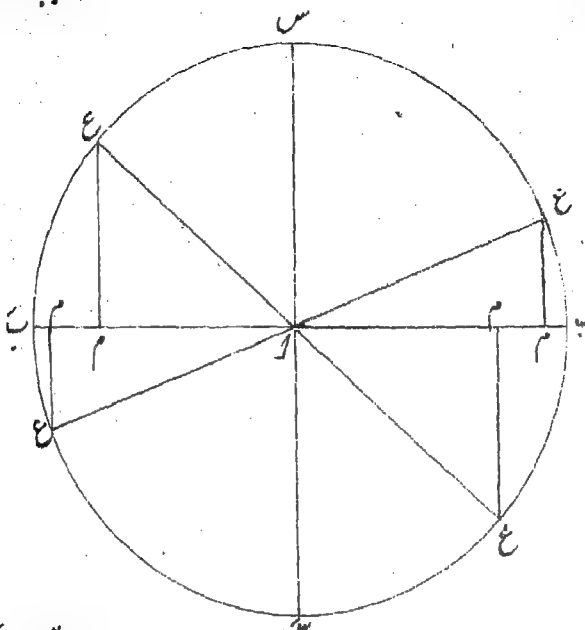
(۵۶) جب زاویہ متغیر ہو تو اس کی جیب کی تغیرات کو تحقیق کرو

فرض کرو کہ ب و ب اور س اس ایک دوسرے پر زاویہ قائمے بنا تھیں اور خط

کا مستقل اور معین طول ہے اور وہ گردہ انجام کے مقام معین ب کے جا لگائی کہ

ع سے دائرہ ب س ب س رسم ہو اور ع کے کسی مقام س ع عمود ب و ب پر

جب ع ب = ع ب



جب ربع منطبق اب پر ہوتا ہے تو ربع م فنا ہوتا ہے اس لیے جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب بھی صفر ہوتی ہے اور جب ربع اول ربع میں حرکت کرتا ہے تو ربع م مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑھتا جاتا ہے یہاں تک کہ ربع منطبق اس پر ہوتا ہے اور ربع م برابر ربع کے ہو جاتا ہے پس زاویہ جب ۹۰ سے ۹۰ تک بڑھتا ہے اس کی جیب سے ۱ تک بڑھتی ہے اور جب ربع دوم ربع میں حرکت کرتا ہے تو ربع م مثبت ہوتا ہے اور متواتر گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ ربع منطبق اب پر ہو جاتا ہے اور ربع م فنا ہو جاتا ہے پس جب زاویہ ۹۰ سے ۰ تک بڑھتا ہے تو جیب اس سے ۱ تک گھٹتی ہے اور جب ربع تیسرے ربع میں حرکت کرتا ہے تو ربع م منفی ہوتا ہے اور تعداد آٹھ ہوتی ہے کہ ربع منطبق اس پر ہوتا ہے اس پر زاویہ ۱۸۰ سے ۹۰ تک بڑھتا ہے تو جیب منفی ہوتی ہے اور تعداد ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے اور جب ربع چوتھے ربع میں متحرک ہوتا ہے تو ربع م منفی ہوتا ہے اور تعداد گھٹتا ہے جب تک کہ ربع منطبق اب پر ہوتا ہے پس زاویہ ۹۰ سے ۰ تک بڑھتا ہے تو جیب منفی ہوتی ہے اور تعداد ۰ سے ۱ تک گھٹتی ہے



باب چہارم (۵۷) زاویہ کی وجہ التمام میں جو تغیرات زاویہ کی متغیر ہونے سے واقع ہوتے ہیں انکو درجہ کا  
 دفعہ گذشتہ کی شکل میں

جمع  $\text{ع} \text{و} \text{ب} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

ابتداء میں  $\text{ع}$  منطبق  $\text{و} \text{ب}$  پر ہوتا ہے اسلئے  $\text{ع} = \text{و}$  پس جب زاویہ صفر ہو تو وجہ التمام  
 ہوتی ہے جبکہ  $\text{ع}$  اول ربع میں حرکت کرتا ہے تو  $\text{و}$  مثبت ہوتا ہے اور متواتر گھٹتا جاتا  
 جاتا ہے کہ  $\text{ع}$  منطبق  $\text{و}$  پر ہوتا ہے اور پھر  $\text{و}$  فضا ہو جاتا ہے پس زاویہ ۹۰ تک  
 بڑھتا ہے وجہ التمام اسے تک گھٹتی ہے اور جب  $\text{ع}$  دوسرے ربع میں حرکت کرتا ہے تو  $\text{و}$   
 منفی ہوتا ہے اور تعداد بڑھتا جاتا ہے جب تک  $\text{ع}$  منطبق  $\text{و}$  پر ہوتا ہے پس زاویہ  
 ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے وجہ التمام منفی ہوتی ہے اور تعداد ۰ سے ایک بڑھتی ہے  
 جب  $\text{ع}$  تیسرے ربع میں حرکت کرتا ہے تو  $\text{و}$  منفی ہوتا ہے اور تعداد کم ہوتا ہے جب تک  
 $\text{ع}$  منطبق  $\text{و}$  پر ہوتا ہے پس زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے وجہ التمام منفی  
 ہوتی ہے اور تعداد ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے اور جب  $\text{ع}$  چوتھے ربع میں حرکت کرتا ہے  
 تو  $\text{و}$  مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑھتا جاتا ہے جب تک کہ  $\text{ع}$  منطبق  $\text{و}$  پر ہوتا ہے  
 پس زاویہ جب ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے وجہ التمام مثبت ہوتی ہے اور  
 ایک بڑھتی ہے

(۵۸) زاویہ کے ماس میں جو تغیرات زاویہ کی متغیر ہونے سے واقع ہوتے ہیں انکو  
 دفعہ ۵۷ کی شکل میں

مس  $\text{ع} \text{و} \text{ب} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$

ابتداء میں  $\text{ع}$  منطبق  $\text{و}$  پر ہوتا ہے اور  $\text{ع} = \text{و}$  فضا ہوتا ہے اور  $\text{و} = \text{ب}$  پس زاویہ  
 جب صفر ہو تو ماس ہی صفر ہوتا ہے اور جب  $\text{ع}$  اول ربع میں حرکت کرتا ہے تو  $\text{و}$  اور  
 $\text{ع}$  دونوں مثبت ہوتے ہیں اور  $\text{ع}$  متواتر بڑھتا ہے اور  $\text{و}$  متواتر گھٹتا ہے جب تک کہ

ازع منطبق اس پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۹۰ سے ۹۰ تک بڑھتا ہے تو ماس سے  
 بے حد و نہایت بڑھتا ہے پس زاویہ کو ۹۰ کے بہت قریب لیکر ماس کو جہاں تک چاہیں  
 بڑھا سکتے ہیں اور اختصار کے واسطے اس مطلب کو یوں ادا کیا کرتے ہیں ماس ۹۰ کا لاند نہایت  
 ہوتا ہے اور جب ازع دوسرے ربع میں حرکت کرتا ہے تو ماس مثبت ہوتا ہے اور لام منفی اور ع م  
 متواتر گھٹتا ہے اور لام تعداد بڑھتا ہے جب تک کہ ازع منطبق اب پر ہوتا ہے پس زاویہ  
 جب ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے تو ماس منفی ہوتا ہے اور تعداد لاند نہایت سے  
 صفر تک گھٹتا ہے اور جب ازع تیسرے ربع میں حرکت کرتا ہے تو ماس اور لام منفی ہوتے ہیں  
 اور ع م تعداد بڑھتا ہے اور لام تعداد گھٹتا ہے جب تک کہ ازع منطبق اس پر  
 ہوتا ہے پس زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے اور ماس مثبت ہوتا ہے اور سے  
 بے حد و نہایت بڑھتا ہے پس زاویہ ۲۷۰ کے نہایت قریب لے کر ماس کو جتنا چاہیں  
 بڑھا سکتے ہیں اور موافق سابق کے اس مضمون کو بھی اختصار کے ساتھ یوں بیان کیا کرتے ہیں  
 کہ ماس ۲۷۰ کا لاند نہایت ہے اور جب ازع چوتھے ربع میں حرکت کرتا ہے تو ماس منفی ہوتا  
 ہے اور لام مثبت ہوتا ہے اور ع م متواتر تعداد گھٹتا جاتا ہے اور لام زیادہ ہوتا ہے جب تک  
 ازع منطبق اب پر ہوتا ہے پس زاویہ ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے ماس منفی ہوتا  
 ہے اور تعداد لاند نہایت سے صفر تک گھٹتا ہے

اسی طرح سے ماس التمام کے تغیرات کی تحقیقات ہو سکتی ہے  
 (۵۹) زاویہ کے قاطع الزاویہ کے اوّل تغیرات کو تحقیق کرو جو زاویہ کے متغیر ہونے سے واقع ہوتا  
 زاویہ کے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی بھی تحقیقات دو ترکیبوں سے ہو سکتی ہے ایک ترکیب تو وہی  
 جو جب اور جب التمام اور ماس کی بیان ہوئی ہے دوسری ترکیب یہ ہے کہ صورت قاطع  
 قطع اب = جمع اب سے یہ نتیجہ نکالیں کہ جو تغیرات جب التمام کے تحقیق ہو جائیں  
 اس سے قاطع الزاویہ کے تغیرات کو بھی معلوم کر لیں اب اس آخر ترکیب کو ہم اختیار کرتے ہیں

کہ جب زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے تو جیب تمام اسی تک گہٹتی ہے تو قاطع الزاویہ  
 - اسے ۲ حد و نہایت بڑھتا ہے اس واسطے قاطع الزاویہ ۹۰ کو نہایت کہتے ہیں اور جب  
 زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے تو جیب تمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۰ سے -۱ تک  
 بڑھتی ہے پس قاطع الزاویہ منفی ہوا اور تعداداً نہایت سے -۱ تک گہٹتا جاتا ہے اور جب  
 زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے تو جیب تمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً -۱ سے ۰ تک  
 گہٹتا ہے پس قاطع الزاویہ منفی ہوتا ہے اور تعداداً -۱ سے ۰ نہایت تک زیادہ ہوتا ہے  
 اور جب زاویہ ۰ سے ۹۰ تک بڑھتا ہے تو جیب تمام مثبت ہوتی ہے اور متواتر  
 ۰ سے ۱ تک بڑھتا ہے پس قاطع الزاویہ مثبت ہوتا ہے اور متواتر نہایت سے ایک  
 گہٹتا ہے

اسی طرح قاطع التمام زاویہ کا بیان ہو سکتا ہے

(۶۰) چونکہ  $\sin 1 = 1$  - حجم ۱ تو زاویہ ۰ سے ۱۸۰ تک زیادہ ہوتا ہے اور جیب معکوس

۰ سے ۱ تک بڑھتا ہے اور جب زاویہ

۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے تو جیب معکوس ۱ سے ۰ تک گہٹتی ہے

(۶۱) پس اب اوپر کے بیان سے یہ علم ہوتا ہے کہ جیب اور جیب التمام کی قیمت -۱

اور +۱ کے درمیان ہوتی ہے اور  $\cos$  اور  $\sin$  التمام کی قیمت -۱ اور

+۱ کے درمیان ہوتی ہے اور قاطع الزاویہ اور قاطع التمام کی قیمت -۱ اور

۱ کے درمیان اور +۱ اور -۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور یہ بھی

ظاہر ہوتا ہے کہ کسی علم شلتی نسبت کی علامت میں تغیر نہیں واقع ہوتا ہے جب تک

کہ صفر اور نہایت پر اسکی نوبت نہیں پہنچتی اور جیب معکوس ہمیشہ مثبت ہوتی ہے

اور اسکی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے

(۶۲) اس باب اور باب گذشتہ سے جو خاص زاویوں کی علم شلتی نسبتوں کی قیمت دریا ہوئی ہے ان سے یہ جدول مرتب کر کے لکھتے ہیں

۱۸۰	۱۵۰	۱۳۵	۱۲۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۰	۰	
۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰	جیب
۱	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	جیب التمام
۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۱	$\sqrt{2}$	$\infty$	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰	ماس
$\infty$	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۱	$\sqrt{2}$	$\infty$	ماس التمام
۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	۲	$\infty$	۲	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱	قاطع الزاۃ
$\infty$	۲	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	۲	$\infty$	قاطع التمام

### امثلہ

- (۱) علم شلتی نسبتین زاویہ ۵۸° کی دریافت کرو
- (۲) زاویہ ۹۹° کی
- (۳) زاویہ ۹۳° کی
- (۴) زاویہ ۹۲۲° کی
- (۵) تمام زاویے جو ۰ اور ۹۰ کے درمیان واقع ہوں اور ارتباط ماس ہیں
- کی شرائط کو پورا کریں دریافت کرو
- (۶) جو زاویے کہ ارتباط جم بر =  $\frac{1}{2}$  کی شرائط کو پورا کریں ان کو ۰ اور ۹۰ کے درمیان
- (۷) اور جیب معکوس  $\frac{1}{2}$  کی قیمتیں دریافت کرو جب ان صحیح عدد ہو

زائجہ کے علم شائی نسبتیں معلوم ہیں

۲۰

(۸) جب  $\left[ \frac{1}{2} \right] + (1 - \frac{1}{4})$  کی قیمتیں دریافت کرو جب کوئی نسبت نہ ہو

(۹) مساوات جیسا بر + جم بر = کو حل کرو

(۱۰) مساوات جیسا بر - جم بر - ۵ = کو حل کرو

(۱۱) جیب اور جم بر - جب بر کی علامتوں کی تغیرات کو اس صورت میں دریافت کرو کہ

اور ۲ کے درمیان بر بدلتا ہو

(۱۲) جم بر - جب بر کے بھی

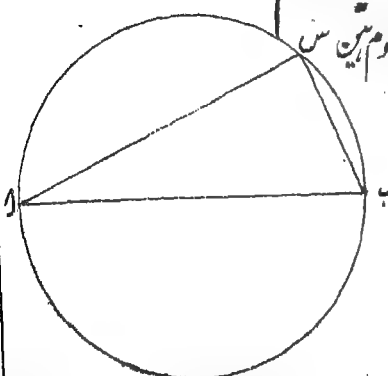
(۱۳) مس بر + جم بر کے بھی

(۱۴) مساوات قطا بر =  $\frac{۲}{۴}$  ط ص ممکن ہے

باب

زائجہ کے علم شائی نسبتیں معلوم ہیں

(۱۵) ایک زاویہ بناؤ جس کی جیب معلوم ہے



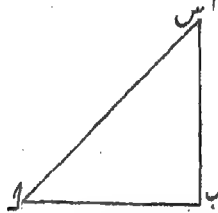
مطلوب ہے کہ ایک زاویہ بنائیں جس کی جیب ایک مقدار معلوم ہو ایک دائرہ بناؤ جس کا قطر ایک ہو اور کوئی قطر اب اس دائرہ کا کچھ اور ب کے مرکز اور ط کے نصف قطر دائرہ بناؤ جو پہلے دائرہ سے نقطہ س پڑے اور ب ش اور اس ملاؤ تو زاویہ اس قائمہ ہوگا اور جیب ب اس کی  $\frac{س}{ب}$  یعنی ط ہوگی اس ط ب اس زاویہ مطلوب ہے اگر زاویہ مطلوب کی جیب تمام ط ہو تو شکل سیطرح بناؤ زاویہ ب س زاویہ مطلوب ہوگا

(۱۶) ایک زاویہ بناؤ جس کا مس یا ماس تمام معلوم ہے

مطلوب ہے کہ زاویہ بنائیں جس کا ماس ایک مقدار معلوم ہو

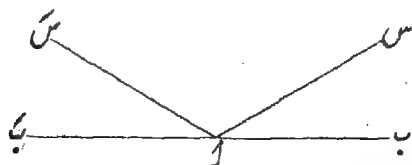
باب پنجم  
 ۷۱  
 ایک خط اب بمقرر کر جو بس کا طول ایک ہو اور ب سے زاویے قائمے بنا یا ہو اب بر طول میں برابر ط کے بناؤ اور س کے بناؤ و پس ماس ب اس کا  $\frac{1}{2}$  یعنی ط ہی ایسا واسطے  
 ب اس زاویہ مطلوب ہے

اگر زاویہ مطلوب کا ماس التمام ط ہو تو شکل پہلی طرح سے بناؤ اس ب زاویہ مطلوب ہوگا



(۶۵) اگر زاویہ ایسا بنانا ہو کہ اس کا قاطع التمام معلوم ہو تو اس سے کہ قاطع التمام متکا فی جیب کا ہوتا ہو اس کی جیب معلوم ہوگی اور جب جیب معلوم ہوئی تو زاویہ بموجب دفعہ ۶۳ کے بن سکتا ہو اور ایسی ہی اگر زاویہ ایسا بنانا ہو کہ اس کا قاطع الزاویہ معلوم ہو تو اس سے کہ قاطع الزاویہ متکا فی جیب التمام کا ہوتا ہو جیب التمام معلوم ہوگی اور جب جیب التمام معلوم ہوئی تو زاویہ بموجب دفعہ ۶۳ کے بن سکتا ہے

اب ہم وہ جملے بیان کریں گے جن میں وہ سب زاویے شامل ہوں جن کے علم مثلثی نسبت معلوم ہو آگے اس سارے باب میں ہم زاویوں کو مقیاس قوس کے موافق تعبیر کریں گے  
 (۶۶) اوں سب زاویوں کے لئے جن کے ایک ہی جیب معلوم ہے ایک جملہ دریافت کرو فرض کرو کہ ب اس چوڑے سے چھوٹا مثبت زاویہ ہو جو جیب معلوم رکھتا ہو



اس زاویہ کو سے تعبیر کرو اور ب کے نقطہ ب تک خارج کرو اور زاویہ  
 ب اس = ب اس کے بناؤ تو ب اس = کہ - کہ

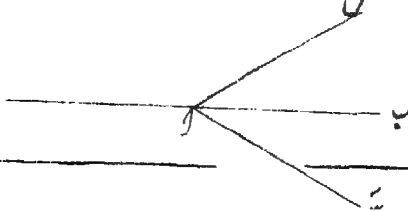
اب شکل سے ظاہر ہے کہ - سہ اور وہ زاویے جو سہ اور کہ - سہ پر چار قانون کے تحت  
صحیح کے زاویہ کرنے سے بنتے ہیں مثبت زاویے ایسے ہیں کہ جنکی جیب وہی ہو جو سہ کی جیب  
اور سوار انکے کوئی اور مثبت زاویہ ایسا نہیں ہے کہ اوسکی جیب وہی ہو جو سہ کی جیب ہے  
یعنی وہ سب زاویے صورت ۳ کہ + سہ اور ۲ کہ + کہ - سہ میں داخل ہیں اس میں  
ن صفر یا کوئی صحیح عدد ہے اور نیز صرف منفی زاویے جنکی جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے  
- (کہ + سہ) اور - (۲ کہ - سہ) اور زاویے جو ان زاویوں پر منفی چار قانون کے  
اضمان سے بنتے ہیں یعنی وہ سب زاویے صورت ۳ کہ - (۲ کہ + سہ) اور  
۲ کہ - (۲ کہ - سہ) میں داخل ہیں اس میں صفر یا کوئی منفی صحیح عدد ہے اسحاق سے معلوم ہوگا  
کہ کل زاویے جو اوپر بیان ہوئے وہ اس صورت

$$ن کہ + (-۱) کہ$$

میں داخل ہیں اس میں ن صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور نیز تمام زاویے جو اس جملہ میں داخل ہیں  
وہ اوں زاویوں میں سے ہونگے جو اوپر بیان ہوئے ہیں وہ سب زاویے جنکی جیب وہی ہے  
جو سہ کی جیب ہے اس صورت ن کہ + (-۱) کہ - میں داخل ہیں اور زاویے اس  
صورت میں داخل ہیں انکے جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے

اس صورت سے وہ زاویے بھی تحقیق ہوتے ہیں جنکا قاطع التمام ایک ہی ہے

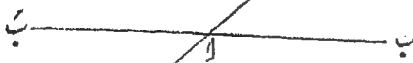
(۶۷) اولن سب زاویوں کے لئے جنکے ایک ہی جیب التمام معلوم ہے ایک جملہ دریا کو  
فرض کرو کہ ب اس کم از کم مثبت زاویہ ایسا ہے جو جیب التمام معلومہ رکھتا ہے اور اس  
زاویہ کو سہ کے تعبیر کرو اور زاویہ ب اس = ب اس کے بناؤ اب شکل سے ظاہر



باب ششم : زاویے جنکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے کہ سہ اور وہ زاویہ

صرف مثبت زاویے جنکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے کہ سہ اور وہ زاویہ  
ہیں جو چار قائموں کے اضلاع صحیح کے زیادہ کرنے سے بنتے ہیں یعنی وہ زاویے جو صورت  
۲۸ کہ + سہ اور ۲۸ کہ + سہ میں داخل ہیں اسمیں ان صفر یا کوئی مثبت عدد ہے  
اور صرف منفی زاویے جنکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے۔ سہ اور  
- (۲۸ کہ - سہ) اور وہ زاویے ہیں جو ان زاویوں پر منفی چار قائموں کے اضلاع صحیح کے  
زیادہ کرنے سے بنتے ہیں یعنی زاویے جو صورت ۲۸ کہ - سہ اور ۲۸ کہ - (۲۸ کہ - سہ)  
میں داخل ہیں اسمیں ان صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہو اور امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ  
یہ سب زاویے جو اوپر مذکور ہوئے اس صورت ۲۸ کہ  $\pm$  سہ

میں داخل ہیں : اسمیں ان صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہو اور نیز جو زاویے اس صورت میں  
داخل ہیں وہ ان زاویوں میں سے ہونگے جو اوپر بیان ہوئے پس سب زاویے جنکی  
جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہو اس صورت میں ۲۸ کہ  $\pm$  سہ میں داخل ہیں  
اور جو زاویے اس صورت میں داخل ہیں انکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے  
اسی صورت سے وہ سب زاویے بھی تحقیق ہو جائیں جنکا قاطع وہی ہے جو سہ کا قاطع ہے  
(۶۸) ان سب زاویوں کے لئے جنکا ایک ہی ماس ہے انکے درافت کرو  
فرض کرو کہ ب اس چٹوے سے چھوٹا مثبت زاویہ ہے جو ماس معلوم رکھتا ہو اور اسکو سے تعبیر کرو اور  
ب ا کو ب تک اور س ا کو س تک بڑھاؤ



اب شکل سے ظاہر ہے کہ صرف مثبت جنکا ماس وہی ہے جو سہ کا ماس ہے کہ + سہ اور وہ  
زاویے ہیں جو سہ اور کہ + سہ پر چار قائموں کے اضلاع زیادہ کرنے سے پیدا ہوتے ہیں یعنی وہ سب





سے زاویہ کے مثلثی نسبتیں معلوم ہیں

جو صورت م کہ + (۱-) میں داخل ہیں اگر ن جفت ہو تو یہ صورت مطابق م = ن - رکے ہوگی اور ن کہ + (۱-) میں ہوگی اگر ن طاق ہو تو صورت مطابق م = ن - رکے ہوگی

وہ سب زاویے بغیر کسی بیشی کے داخل ہیں جنکا قاطع التمام ہے جو حصہ کا قاطع التمام ہے

(۶) اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خواہ صد کوئی سا زاویہ ہو صورت ۲ کہ + صد

میں وہ سب زاویے بغیر کسی بیشی کے داخل ہیں جنکی جیب التمام اور قاطع الزاویہ اور جیب

وہی ہے جو حصہ کی جیب التمام اور قاطع الزاویہ اور جیب معکوس ہے

اور صورت ن کہ + صد میں وہ سب زاویے بغیر کسی بیشی کے داخل ہیں جنکا ماس اور ماس التمام

وہی ہے جو حصہ کے ماس یا ماس التمام ہے

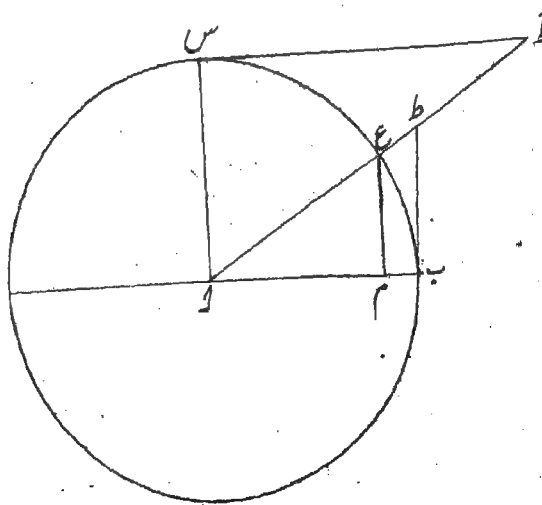
(۷) اس باب کے ختم کرنے سے پہلے ہم علم مثلثی جملوں کے حدود کی طرف پرہوج کرے ہیں ان

جملوں کی کیفیت ہم نے یہ بیان کی ہے کہ وہ مثلث قائم الزاویہ کے ضلع کی نسبتیں ہیں مگر زمانہ

قدیم میں انکی تعریف اور ہی طرح سے ہو کرتی تھی کتابوں میں انکے ذکر اور اشارے کئے

اب بھی آجاتے ہیں اسلئے مناسب معلوم ہوتا کہ ان حدود کا بیان موافق متقدمین کے بھی لکھا جائے

تاکہ طالب علم اس مقامات کے مطالعہ میں عاجز نہ رہیں



فرض کرو کہ آ کر مرکز اور اب نصف قطر کسی دائرہ کا ہو اور ب ع کوئی قوس اوسکی ہو نصف قطر  
 اوس زاویہ بناتا ہو اب پر کچھ اور ب اور س کے ماس اس دائرہ کے کچھ اور لے کو ٹرناؤ  
 کہ وہ اول ماس سے نقطہ ط پر اور دوسرے ماس سے نقطہ ط پر لے اور ع م عمود اب پر نکلا  
 پس متقدمین کی حدود یہ ہیں کہ وہ خطوط کو علم مثلثی جملے قوس کے کہتے ہیں اور وہ شکل میں بنے  
 ہو کر ہیں اونکا بیان یہ ہے کہ ع م قوس ب ع کی جیب اور ل م اوسکی جیب التمام اور ب ط اوسکا  
 ماس اور س ط اوسکا ماس التمام ہے اور ل ط قاطع القوس اور ل ط قاطع التمام اور ب م  
 جیب معکوس ہے اور ج خط ب اور ع میں ملایا جا اوسکو وتر قوس ب ع کا کہتے ہیں غرض  
 متقدمین جیب اور جیب التمام وغیرہ سے خاص خطوط کو تعبیر کرتے ہیں متاخرین کی طرح نسبتوں  
 سے نہیں تعبیر کرتے تھے اور ان کے نام ط جیب اور جیب التمام وغیرہ کے طول نصف قطر دائرہ بنیویں  
 ہوتی تھی اسلئے ضرور ہوا کہ ہم یہ بیان کریں کہ وہ اس نصف قطر کا طول انہی تحقیقات میں کیا متقرر کیا گیا ہے  
 (۷۲) یہ بات تو بڑی آسان ہے کہ قدیم اور جدید علم مثلثی جملوں کی قیمتوں کو آپس میں مربوط کریں گے

$$\text{جیب زاویہ ع اب} = \text{ع م}$$

$$\text{جیب قوس ع ب} = \text{ع م}$$

$$\text{پس جیب قوس} = \text{نصف قطر دائرہ} \times \text{جیب زاویہ کے}$$

$$\text{اور جیب زاویہ} = \frac{\text{جیب قوس}}{\text{نصف قطر دائرہ}}$$

اور علیٰ ہذا القیاس اور علم مثلثی جملوں میں ہی ایسی سی نتائج نکلے ہیں  
 پس اس طرح سے کوئی صورت قانونی جو متاخرین کے علم مثلثی جملوں میں لکھی ہوئی ہو متقدمین  
 علم مثلثی جملوں میں جنہیں قوسوں کے جملے ہو گئے تھیں وہی ہو سکتی ہے اور بالعکس اسکے یہی عمل ہو سکتا ہے  
 مثلاً کسی زاویہ کو تعبیر کر کے تو بموجب دفعہ ۳۴ کے

$$\text{جیب}^2 = 1 + \text{جیب}^2 = 1$$

اب قوس مجازی زاویہ کے اوس دائرہ میں فرض کرو جسکا نصف قطر نق ہو تو

$$\text{جیب } \frac{\text{جیب } \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\text{جیب } \beta}{\sin \beta} = 1$$

$$\text{پس جیب } \alpha + \text{جیب } \beta = \text{نق}$$

اور جیب نصف زاویہ ربع کے

$$\frac{\text{جیب } \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{جیب } \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1$$

اور اس کے وتر قوس کا = نصف قطر دائرہ  $\times$  دو جیب نصف زاویہ کے

(۳) چونکہ قوس کی جیب برابر حاصل نصف قطر دائرہ اور جیب زاویہ کے ہوتی ہے

اسے یہ مستند ہوتا ہے کہ اگر نصف قطر دائرہ کا واحد تعداد میں فرض کریں تو دونوں متاخرین اور

متقدمین کے موافق جیب ایک ہی ہو جائیگی اور اسے نتائج اور علم مثلثی جملوں کے واسطے استخراج

ہونگے پس کوئی صورت جو نظم قدیم کے موافق مرتب ہو وہ نصف قطر کو برابر واحد کے فرض کرنے

سے نظم جدید میں بیان ہو جائیگی

(۴) متقدمین کے حدود سے وجہ تسمیہ جیب اور قوس کی خوب معلوم ہوتی ہے قوس کہاں کہہ

اور جیب گریبان کو کہتے ہیں ظاہر و کما ہی دیکھا کہ کہاں کا گریبان چلے کہاں ہے اب دیکھ لو ادا ناچلہ اور نصف

کہاں کی وہی قیمت ہے جو نصف قوس اور اس کے جیب کی ہے اور حاس اور قاطع الزاویہ کی

وجہ تسمیہ ظاہر ہے

(۵) اب تمام انگریزی کتابوں میں متاخرین کے نظم علم مثلثی جملوں کا متقدمین کے نظم پر تفت

لیکھا ہے اول اول ڈاکٹر پی کاک صاحب نے اس ترکیب کو داخل کیا ہے اور ریتی کس نے

قاطع اور قاطع التمام کو ایسا ذکر کے علم مثلثی نسبتوں کی جدول کو کامل کیا ہے

مشالین

(۱) مس بر = ۱ میں قیمت عامہ بر کی لکھو

(۲) جیب بر = ۱ میں قیمت عامہ بر کی لکھو

(۳) جم بر = ۱ میں قیمت عامہ بر کی لکھو

- (۴) جم بر =  $\frac{1}{2}$  مین قیمت عامہ بر کی لکھو
- (۵) مساوات جب بر = جب اسے کی شرائط کو جو قیمتیں بر کی پورا کریں اونکو دریافت کرو
- (۶) قم بر =  $\frac{1}{2}$  مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو
- (۷) مساوات جم بر = جم اسے کی شرائط کو جو قیمتیں بر کی پورا کریں اونکو دریافت کرو
- (۸) قطا =  $\frac{1}{2}$  مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو
- (۹) مساوات مس بر = مس اسے کی شرائط کو جو قیمتیں بر کی پورا کریں اونکو دریافت کرو
- (۱۰) مس بر =  $\frac{1}{2}$  مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو
- (۱۱) ثابت کرو کہ صورت ۲۸ کہ ۴ میں وہ سب زاویے داخل ہیں جنکی جب کی وہ قیمتیں ہے جو جب التمام سے کی ہے

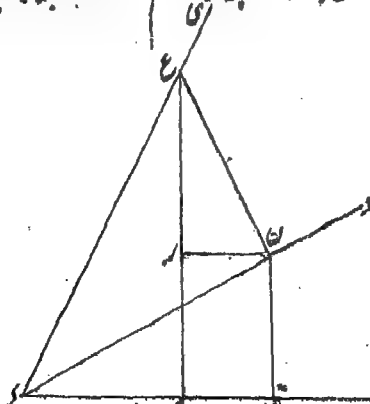
(۱۲) بر کی وہ قیمت لکھو جو ان دونوں باتوں کی شرائط کو پورا کرے

جب بر =  $\frac{1}{2}$  اور جم بر =  $\frac{1}{2}$

## چٹا باب

دو زاویوں کے علم شلشی حل

(۷۶) دو زاویوں کے مجموعہ کی جب اور جب التمام کو اونکے خود جب اور جب التمام کی قیمتیں پانچ



زاویہ س و ر کو اسے اور زاویہ د و س کو ب کے تعبیر کرو تو زاویہ س ہی تعبیر ۱ + ب سے ہو گا  
 د ہی میں کوئی نقطہ نہ کا مقرر کرو اور ع م عمود د س پر اور س ن عمود د س پر اور ن ر عمود

ع م پر اور ن ق عمود دس پر نکالو تو زاویہ ع ن ر تمامی زاویہ ر ن ق یعنی ن دس کے ہوگا اسی طرح ن ع برابر آئے گے

$$\begin{aligned} \text{اب جب } (ا + ب) &= \frac{ع م}{ع ن} = \frac{ر م + ع ر}{ع ن} = \frac{ن ق}{ع ن} + \frac{ع ر}{ع ن} \\ &= \frac{ن ق}{ع ن} + \frac{ع ر}{ع ن} = \frac{ن ق}{ع ن} + \frac{ع ر}{ع ن} = \frac{ن ق}{ع ن} + \frac{ع ر}{ع ن} \end{aligned}$$

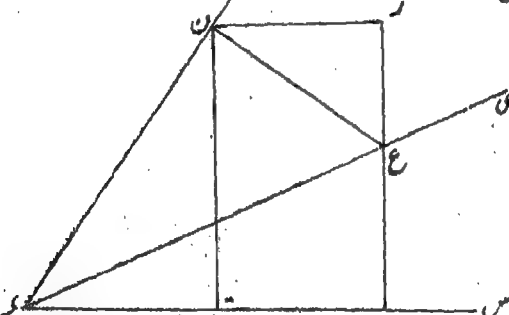
= جب اجم ب + جم اجم ب =

$$\text{جم } (ا + ب) = \frac{ع م}{ع ن} = \frac{ع م - ع ن}{ع ن} = \frac{ع م}{ع ن} - \frac{ع ن}{ع ن}$$

$$= \frac{ع م}{ع ن} - \frac{ع ن}{ع ن} = \frac{ع م}{ع ن} - \frac{ع ن}{ع ن}$$

= جم اجم ب - جب اجم ب =

(۷۷) در زاویوں کے مجموعہ اور حاصل تفریق کے حجب التمام خود اوّل زاویوں کی حجب اوزر کی رقموں میں بیان کرد



فرض کرو کہ زاویہ س و د کا ا سے اوّل زاویہ د س کا ب قسمے تب غیر متوفا ہے تو زاویہ س د س تب غیر ا ب سے ہوگا د س میں کوئی نقطہ ع کا مقرر کر کے ع م عمود دس پر اور ر ع ن عمود دس پر اور ن ر عمود ع م پر اور ن ق عمود دس پر نکالو تو زاویہ ع ن ر تمامی زاویہ ع ن ق کی ہوگی اور اسی طرح ن ع برابر آئے گے ہوگا اسی طرح ن ع برابر آئے گے ہوگا

$$\begin{aligned} \text{اب جب } (ا - ب) &= \frac{ع م}{ع ن} = \frac{ر م - ع ر}{ع ن} = \frac{ن ق}{ع ن} - \frac{ع ر}{ع ن} \\ &= \frac{ن ق}{ع ن} - \frac{ع ر}{ع ن} = \frac{ن ق}{ع ن} - \frac{ع ر}{ع ن} \end{aligned}$$

$$= \text{جب } ۱ \text{ جم } ب - \text{جم } ۱ \text{ جب } ب$$

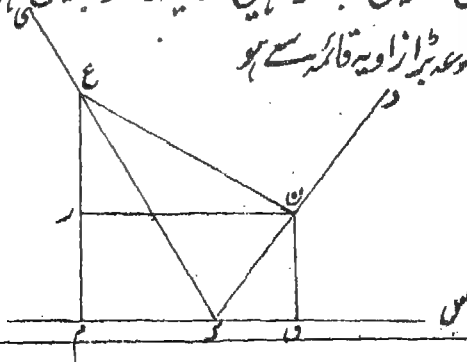
$$\text{جم } (۱ - ب) = \frac{\text{دق} + \text{ق} م}{\text{دع}} = \frac{\text{دق} + \text{ق} م}{\text{دع}} + \frac{\text{ن} ر}{\text{دع}}$$

$$= \frac{\text{دق} + \text{ق} م}{\text{دع}} + \frac{\text{ن} ر}{\text{دع}} = \frac{\text{دق} + \text{ق} م + \text{ن} ر}{\text{دع}}$$

$$= \text{جم } ۱ \text{ جم } ب + \text{جم } ۱ \text{ جب } ب$$

(۷) اوپر جو اثبات بیان ہوئے ہیں وہ اس بات کو ذہن میں رکھنے سے آسانی یاد رہ سکتے ہیں کہ نقطہ ع کا جب (۱ + ب) اور جم (۱ + ب) کے صورت میں تو اس خط میں لیا گیا ہے جزا تو ۱ + ب کو احاطہ کرتا ہے اور جب (۱ - ب) اور جم (۱ - ب) کے صورت میں نقطہ ع کا اس خط میں لیا گیا ہے کہ زاویہ ۱ - ب کو احاطہ کرتا ہے پس جب شکل بن جاتا تو پرا تقارن اثبات میں یہ کہ زاویہ ن ع برابر زاویہ و کے ہو وہ عمل شکل سے خود ہی ظاہر ہو جائیگا کہ خطوط ن ع اور ر ع عمود اور ن خطوں پر ہیں جیسے کہ زاویہ ۱ بنا ہی ہوا ہے اس لئے وہ زاویہ برابر کے بناتے ہیں

(۸) دفعات ۷، ۸، ۹ میں جو صورت قانونی بیان ہوئیں ان میں زاویے ۱ اور ب ہر مقدار کے ہو سکتے ہیں طالب علم ان کے مختلف صورت تین بنانا کہ شکلیں کچھ بنی اور دعوی کو ثابت کر لے فقط ان اختلافات میں جس بات کا فرق پڑیگا وہ یہ ہوگا کہ بعض صورتوں میں عمود خطوط تقسیم واقع ہونگے اور بعض صورتوں خطوط مستقیم محدودہ پر اب ہم مثال کے طور پر دفعہ ۷ کی صورت قانونی کو اس حالت میں ثابت کرتے ہیں کہ زاویہ ۱ اور ب میں سے ہر ایک چھوٹا زاویہ قائمہ ہو مگر اس کا مجموعہ بڑا زاویہ قائمہ سے ہو



مفسر کہ زاویہ س و د کا د سے اور زاویہ د و ی کا ب سے تعبیر ہوتا ہے تو زاویہ س و ی کا  
 ۱ + ب سے تعبیر ہوتا ہے ی میں کوئی نقطہ ع کا مقرر کرو اور ع م نمود س و نمود د پر  
 ع ن نمود د پر کچھ اور ن ر نمود ع م پر اور ن ق نمود دس پر نکالو تو زاویہ ع ن ر تمام زاویہ  
 ن و کی یعنی ن دس کی ہوگی اس واسطے ن ع برابر لگے ہوگا

$$\begin{aligned} \text{اب جب } (۱ + ب) = \frac{ع م}{ع د} = \frac{م ر + ع ر}{ع د} &= \frac{ن ق}{ع د} + \frac{ع ر}{ع د} \\ \frac{ن ق}{ع د} = \frac{ن ق}{ع د} + \frac{ع ر}{ع د} - \frac{ع ر}{ع د} &= \frac{ع ر}{ع د} \\ \text{جب } (۱ + ب) = \text{جم} + \text{جب} & \text{ جب } (۱ + ب) = \text{جم} + \text{جب} \end{aligned}$$

اور نیز جم (۱ + ب) = ع ر

بیان ہو یہ بات یاد رکھنے چاہئے کہ ہم جانب چین کے اندازہ ہوا ہے اسلئے ایک مقدار

اور ہم اس جگہ دق - ق م یعنی دق - ن ر رکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{جم } (۱ + ب) &= \frac{دق - ن ر}{ع د} = \frac{دق}{ع د} - \frac{ن ر}{ع د} \\ \frac{دق}{ع د} - \frac{ن ر}{ع د} &= \frac{دق}{ع د} - \frac{ن ر}{ع د} \\ \text{جم } (۱ + ب) &= \text{جم} - \text{جب} \end{aligned}$$

(۸۰) دفعات ۷۷، ۷۸ میں جو صورت قانونیہ ثابت ہوئیں ہیں وہی اصول اس علم کی ہیں اور  
 انکو اصول قوانین علم ششانی کہتے ہیں اس واسطے ضرور ہے کہ انکا عام ہونا بتلایا جائے اور دکھایا جائے

دفعہ گذشتہ میں ہم نے ایک صورت لکھی طالب علم اس طرح اسکے سب اختلافات خود  
 لکھ کر سب صورتیں ثابت کر لے اور انکو عام ہونے کی امتحان کی تصدیق کر لے بعض مسائل ہم ثابت  
 کر آئے اور کئی عام شائع مطلوب کا اثبات حقیقہ اور قطعہ کر سکتے ہیں  
 جو صورت قانونی ہو کر ثابت کرتے ہیں وہ یہ ہیں

(۱) جب (۱ + ب) = جب (۱ + ب) + جم (۱ + ب)

(۲) جم (۱ + ب) = جب (۱ + ب) - جب (۱ + ب)



جب (۱-ب) = جب لا جم ب - جم لا جب ب (۳)

جم (۱-ب) = جم لا جم ب + جب لا جب ب (۴)

اب دفعات ۷ اور ۹ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ (۱) اور (۲) اون سب زاویوں پر حاوی ہیں جن میں لا اور ب کی مثبت قیمتیں ہیں اور کوئی قائمہ سے بڑی نہیں اور دفعہ ۷ میں ہم نے (۳) اور (۴) کو ثابت کیا ہے کہ وہ اون سب زاویوں پر حاوی ہیں جن میں لا اور ب کی مثبت قیمتیں قائمہ سے بڑی نہیں اور لا بڑا ب سے بڑا اول ہم یہ ثابت کریں گے کہ لا کی بڑے ہونے کی قید (۳) اور (۴) میں کچھ ضرور نہیں

بوجہ دفعہ ۴ جب (۵-ب) = - جب (ب-۱)

جم (۱-ب) = جم (ب-۵)

پس اگر ہم اس بات کو جانتے ہیں کہ

جب (ب-۱) = جب ب م لا - جم ب جب لا

اور جم (ب-۱) = جم ب جم لا + جب ب جب لا

تو ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ

جب (۱-ب) = جب لا جم ب - جم لا جب ب

جم (۱-ب) = جم لا جم ب + جب لا جب ب

اس واسطے اگر (۳) اور (۴) حاوی اون لا اور ب کی قیمتوں پر ہیں جو مابین سی حدود

واقع ہوں اور لا بڑا ب سے ہوا تو وہ لا اور ب کی اون قیمتوں پر بھی حاوی ہوں گیں کہ مابین

حدود مذکور کے واقع ہوں اور لا چھوٹا ب سے ہو

پس اے ہکو معلوم ہو گیا کہ چاروں صورتوں میں جو قانونی صحیح اور درست اون قیمتوں کی لی ہیں کہ جن پر

زاویہ صفر اور قائمہ کے درمیان واقع ہوا و مثبت ہوا ہم یہ ثابت کریں گے کہ اگر صورت قانونی

لا اور ب کی اون قیمتوں کے واسطے درست ہیں کہ خاص حدود کے درمیان واقع ہیں

کو یہ حدین بقدر ایک قائرہ کے زیادہ ہو سکتی ہیں اس واسطے کہ بموجب دفعہ ۵۲ کے

$$\text{جب } (90 + 1 + 1 + 1) = \text{جم } (1 + 1) = \text{جم } 1 \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \text{ جب } 1$$

$$= \text{جب } (1 + 1) \text{ جم } 1 \text{ جب } 1 \text{ جب } (1 + 1) \text{ جب } 1$$

پس اس طرح اگر (۲) کسی جدول کے واسطے صحیح ہو تو اس سے (۱) کے صداقت کو ہر ایک زاویہ کے حد پر ۹۰ زیادہ کر کے ثابت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس یہ کیفیت اور صورت قانونی کی ہیں اور اس طرح سے ہم جائز شک یا ہیں زاویوں کی جدول کو زیادہ کر سکتے ہیں اب اگر باقی یہ ہے کہ یہی قانونی منفی زاویوں کے واسطے بھی قائم ہو سکتے ہیں فرض کرو کہ ۱ اور ۲ منفی ہوں  $1 = -1$  اور  $1 = -1$  تو

$$\text{جب } (1 + 1) = \text{جب } (-1 - 1) = \text{جب } (1 + 1) \text{ بموجب دفعہ ۴۹}$$

$$= (- \text{جب } 1 \text{ جم } 1 + \text{جم } 1 \text{ جب } 1)$$

$$= \text{جب } (-1) \text{ جم } (-1) \text{ جم } (-1) \text{ جب } (-1) \text{ جب } (-1)$$

$$= \text{جب } 1 \text{ جم } 1 + \text{جم } 1 \text{ جب } 1$$

علیٰ ہذا القیاس اور صورت قانونی کی یہی اس طرح تصدیق ہو جائیگی جو دو نو زاویے منفی ہوں یا ایک زاویہ زاویوں میں سے منفی ہو

(۸۱) یہ چار صورت قانونیہ جو ہم نے لکھے ہیں اول سے بہت صورت قانونیہ مستنبط ہو سکتی ہیں

چند بطور تشیل کے ہم لکھتے ہیں

$$(۸۲) \text{ جب } (1 + 1) \text{ اور جم } (1 + 1) \text{ کے جدول میں } 1 = 1 \text{ کے رکھو تو}$$

$$\text{جب } 1 = 1 = 2 \text{ جب } 1 \text{ جم } 1$$

$$\text{جم } 1 = 1 = 1 - 1 \text{ جب } 1 = 1 - 2 \text{ جب } 1 = 2 \text{ جم } 1 - 1$$

$$\text{پس } 1 + 1 = 1 = 2 \text{ جم } 1$$

$$1 - 1 = 1 = 2 \text{ جب } 1$$

اور  $\frac{1-جم}{1+جم} = \frac{س}{س-د}$  (۸۳) چاروں صورتوں کی سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$جب (1+ب) + جب (1-ب) = 2جب 1جم ب$$

$$جب (1+ب) - جب (1-ب) = 2جم 1جب ب$$

$$جم (1+ب) + جم (1-ب) = 2جم 1جم ب$$

$$جم (1-ب) - جم (1-ب) = 2جم 1جب ب$$

فرض کرو  $1+ب = س$  اور  $1-ب = د$  اس واسطے

$$1 = \frac{1}{س} (س+د) \text{ اور } 1 = \frac{1}{د} (س-د) \text{ پس}$$

$$جب س + جب د = 2جب \frac{س+د}{2} جم \frac{س-د}{2}$$

$$جب س - جب د = 2جم \frac{س+د}{2} جم \frac{س-د}{2}$$

$$جم د - جم س = 2جب \frac{س+د}{2} جب \frac{س-د}{2}$$

$$(۸۴) جب (1+ب) جب (1-ب)$$

$$= (جب 1جم ب + جب 1جب ب) (جب 1جم ب - جب 1جب ب)$$

$$= جب 1جم ب - جب 1جب ب$$

$$= جب 1 (1-ب) - جب 1 (1+ب) جب 1$$

$$= جب 1 - جب 1$$

$$\text{اور جم } (1+ب) جم (1-ب)$$

$$= (جم 1جم ب - جب 1جب ب) (جم 1جم ب + جب 1جب ب)$$

$$= جم 1جم ب - جب 1جب ب$$

$$= جم 1 (1-ب) - جب 1 (1+ب) جب 1$$

$$= جم 1 - جب 1 = جم ب - جب 1$$

(۱۵)  $\sin(b) = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a)} = \frac{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}{\sin(a)}$   
 آخر جملہ کے شمار کنندہ اور مذکورہ جملہ پر تقسیم کر دو تو یہ حاصل ہوگا

$$\frac{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}{\sin(a)} = \cos(b) + \frac{\cos(a) \sin(b)}{\sin(a)}$$

$$\frac{\cos(a) \sin(b)}{\sin(a)} = \cos(a) \cot(b) = \cos(a) \frac{\cos(b)}{\sin(b)}$$

فرض کرو کہ  $b = 90^\circ$  تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\cos(a) \cot(90^\circ) = \cos(a) \cdot 0 = 0$$

$$\sin(b) = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a)} = \frac{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}{\sin(a)}$$

$$\frac{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}{\sin(a)} = \cos(b) + \frac{\cos(a) \sin(b)}{\sin(a)}$$

مثلاً فرض کرو کہ  $b = 90^\circ$  اسلئے  $\sin(b) = 1$  اور ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\sin(90^\circ) = \frac{\sin(a+90^\circ)}{\sin(a)} = \frac{\sin(a) \cos(90^\circ) + \cos(a) \sin(90^\circ)}{\sin(a)}$$

$$\frac{\sin(a) \cos(90^\circ) + \cos(a) \sin(90^\circ)}{\sin(a)} = \cos(90^\circ) + \frac{\cos(a) \sin(90^\circ)}{\sin(a)}$$

$$\frac{\cos(a) \sin(90^\circ)}{\sin(a)} = \cos(a) \cot(90^\circ) = \cos(a) \cdot 0 = 0$$

فرض کرو کہ  $b = 0^\circ$  تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\sin(0^\circ) = \frac{\sin(a+0^\circ)}{\sin(a)} = \frac{\sin(a) \cos(0^\circ) + \cos(a) \sin(0^\circ)}{\sin(a)}$$

$$\frac{\sin(a) \cos(0^\circ) + \cos(a) \sin(0^\circ)}{\sin(a)} = \cos(0^\circ) + \frac{\cos(a) \sin(0^\circ)}{\sin(a)}$$

$$(۸۷) \text{ جب } ۱۲ = ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جم} = \frac{۱ \text{ جب } ۱ \text{ جم} + ۱}{۱۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم} + ۱} \text{ (دفعات } ۱۲ \text{ اور } ۳۲)$$

آخر جمل کے نسب نامہ اور شمار کنندہ کو جم ۱ پر تقسیم کرو تو یہ حاصل ہوگا

$$\begin{array}{r} ۱ \text{ جب } ۱ \\ \hline ۱ \text{ جم} \\ \hline ۱ + ۱ \text{ جب } ۱ \\ \hline ۱ + ۱ \text{ جم} \\ \hline ۱ = ۱ \text{ جب } ۱ \end{array}$$

$$\text{اور نیز جم } ۱ = ۱ \text{ جم} - ۱ \text{ جب } ۱ = \frac{۱ \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ جم}}{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جم}} \text{ (دفعات } ۱۲ \text{ اور } ۳۲)$$

$$= \frac{۱ - ۱ \text{ جم}}{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جم}} = \frac{۱ - ۱ \text{ مس}}{۱ + ۱ \text{ مس}}$$

$$(۸۸) \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ جب } ۱} = \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ جب } ۱} \text{ (دفعہ } ۸۲)$$

$$(۸۳) \frac{۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم}}{۱ \text{ جم} - ۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم}} = \frac{۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم}}{۱ \text{ جم} - ۱ \text{ جم} + ۱ \text{ جم}}$$

$$(۸۹) \text{ مس } ۱ + \text{مس } ۱ = \text{مس } ۱ + \text{مس } ۱ = \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}$$

$$= \frac{۱ \text{ جب } (۱ + ۱)}{۱ \text{ جب } (۱ + ۱)}$$

$$(۹۰) \text{ مس } ۱ + ۱ = ۱ \text{ جم} + \frac{۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱} = \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱}$$

$$= \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱} = \frac{۱ \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱}{۱ \text{ جب } ۱}$$

$$\frac{1 \text{ حم} - 1 \text{ ج}}{1 \text{ حم} 1 \text{ ج}} = \frac{1 \text{ حم}}{1 \text{ ج}} - \frac{1 \text{ ج}}{1 \text{ حم}} = 1 \text{ م} - 1 \text{ س}$$

$$r - \frac{r}{\text{ج}} = \frac{r}{\text{ج}^2} - = \frac{r}{\text{ج}^3} - =$$

(91) جب ۱ = جب (۱ + ۲) = جب ۳ جم ۱ + جب ۲ جم ۱  
= جب ۱ جم ۱ + جب ۲ (۱ - جب ۵)

$$1 = 3 - 2$$

$\text{حجم } 1 = \text{حجم } (1+1) = \text{حجم } 1 + \text{حجم } 1 = \text{حجم } 1 + \text{حجم } 1 = \text{حجم } 2$   
 $= (\text{حجم } 1 + 1) = \text{حجم } 1 + 1 = 2$   
 $= 2 - 1 = 1$

اسے معلوم ہوا کہ اس ۱۳ =  $\frac{۱۳}{۱۳}$  =  $\frac{۳۰-۱۰}{۳۰-۱۰}$  =  $\frac{۲۰}{۲۰}$

شمار کنند و اورب نماند و کو خرم و تقسیم کرد

$$\frac{۳۳۵}{۵۲۴} - \frac{۲۳۵}{۵۲۴} = \frac{۱۰۰}{۵۲۴}$$

$$\frac{\text{مستحقه} - \text{مستحقه}}{\text{مستحقه}} = \text{مستحقه}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} - 2 \\ & \frac{3}{5} - 2 = \frac{3 - 10}{5} = \frac{-7}{5} \\ & \frac{3}{5} - 2 = \frac{3 - 10}{5} = \frac{-7}{5} \end{aligned}$$

(۹۲) ۱۵ اور ۲۵ کے زاویوں کی علم شلتی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو

$$\begin{aligned} \text{جب } 10 &= \text{جب } (20 - 10) = \text{جب } 10 - \text{جم } 10 = \text{جم } 0 \\ \text{جم } 10 &= \text{جم } (20 - 10) = \text{جم } 10 + \text{جب } 10 = \text{جب } 20 \end{aligned}$$

$$\frac{1+r_h}{r} = \text{جم } 10 = (\text{جم } 10 - \text{جم } 10) + \text{جم } 10 + \text{جم } 10 = 10$$

$$P_n + r = \frac{(1 + P_n)}{r} = \frac{1 + P_n}{1 - P_n} = \frac{10\%}{90\%} = 10\%$$

$$\frac{F_{hr}}{1 - \gamma_h} = \frac{1}{0.05} = 10 \text{ م} \quad \frac{F_{hr}}{1 + \gamma_h} = \frac{1}{0.05} = 10 \text{ م}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} = ۱۵ = \text{جب } ۱۵ \text{ اور } ۱ + \frac{\sqrt{3}}{2} = ۱۵ = \text{جم } ۱۵$$

$$\sqrt{3}-۲ = ۱۵ = \text{سس } ۱۵ \text{ اور } \sqrt{3}+۲ = ۱۵ = \text{مم } ۱۵$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = ۱۵ = \text{قط } ۱۵ \text{ اور } \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = ۱۵ = \text{قم } ۱۵$$

(۹۳) اگر جب ۱ = جب ب اور جم ۱ = جم ب تو ۱ اور ب

کسا برابر ہونگے یا انہیں تفاوت بعض اضعاوت چار قانون کا ہوگا

$$\text{اسو اسطے } \text{جم } (۱-ب) = \text{جم } ۱ + \text{جب } ۱ + \text{جب } ۱$$

$$= \text{جم } ۱ + \text{جب } ۱ = ۱$$

اسو اسطے ۱-ب = ۰ یا چار قانون کے اضعاوت مثبت یا منفی کے بموجب دفعہ ۶۷ کے

(۹۴) اگر جم ۱ = جم ب اور جب ۱ = - جب ب تو ۱ + ب صفر ہی یا اضعاوت

مثبت منفی چار قانون کا ہے

اسو اسطے کہ ارتباطات معلوم کو اسطرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{جم } ۱ = \text{جم } (ب) \text{ اور } \text{جب } ۱ = \text{جب } (ب) \text{ بموجب دفعہ } ۶۹ \text{ کے}$$

اسو اسطے بموجب دفعہ گذشتہ ۱- (ب) یعنی ۱ + ب صفر ہی یا اضعاوت مثبت منفی قرار دے

### مثالین

ان مطابقوں کو ثابت کرو

$$(۱) \text{ جم } ۱ + \text{جب } ۱ = \text{سس } ۱۲ + \text{قط } ۱۲$$

$$(۲) ۲ \text{ جب } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جم } ۱ + \text{جم } ۲ = ۱$$

$$(۳) \text{ سس } (۱+۲۵) - \text{سس } (۱-۲۵) = ۲ \text{ سس } ۱۲$$

$$(۴) \text{ جب } ۱۳ - \text{قم } ۱ - \text{جم } ۱۳ = \text{قط } ۱ = ۲$$

$$(۵) ۳ \text{ جب } ۱ - \text{جب } ۱۳ = ۲ \text{ جب } ۱ - (۱ - \text{جم } ۱۲)$$

$$(۶) \frac{\text{ج} ۱ + ۲ \text{ج} ۳ + ۵ \text{ج} ۵}{\text{ج} ۱ + ۲ \text{ج} ۳ + ۵ \text{ج} ۵} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۵}$$

$$(۷) \frac{\text{ج} ۱}{\text{ج} ۱} = \frac{\text{ج} (۱+۲) - ۲ \text{ج} (۱+۲)}{\text{ج} ۱}$$

$$(۸) \text{ج} ۲ = ۲ \text{ج} ۱ - ۲ \text{ج} ۱ = ۰$$

$$(۹) \frac{\text{ج} ۱ - ۲ \text{ج} ۳}{\text{ج} ۱ - ۲ \text{ج} ۳} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۱۰) \frac{\text{ج} ۲ - ۲ \text{ج} ۳}{\text{ج} ۲ - ۲ \text{ج} ۳} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۱۱) \text{ق} ۲ + ۲ \text{م} = ۲ \text{م} - ۲ \text{ق} ۲$$

$$(۱۲) \text{ج} ۱ (۱-۲) + \text{ج} ۲ (۱-۲) = \text{ج} ۱ (۱-۲) + \text{ج} ۲ (۱-۲)$$

$$(۱۳) \text{ج} ۱ (۱-۲) + \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱-۲) = \text{ج} ۱ (۱-۲) + \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱-۲)$$

$$(۱۴) \frac{۱ - ۲(۱-۲)}{۱ - ۲(۱-۲)} = \frac{\text{ج} ۲}{\text{ج} ۲}$$

$$(۱۵) \frac{۲ \text{م} - ۲(۱-۲)}{۲ \text{م} - ۲(۱-۲)} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۱۶) \text{ج} ۱ (۱+۲) + \text{ج} ۲ (۱+۲) = \text{ج} ۱ (۱+۲) + \text{ج} ۲ (۱+۲)$$

$$(۱۷) \frac{\text{ج} ۱ + ۲ \text{ج} ۳}{\text{ج} ۱ + ۲ \text{ج} ۳} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۱۸) \text{ج} ۱ + \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۱ + \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$

$$(۱۹) \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$

$$(۲۰) \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۲ (۱-۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$

$$(۲۱) \text{ج} ۳ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۳ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$

$$(۲۲) \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳} + \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۲۳) \text{ج} ۱ (۱+۲) - \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۱ (۱+۲) - \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$

$$(۲۴) \frac{\text{ج} ۱ + \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)}{\text{ج} ۱ + \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)} = \frac{\text{ج} ۳}{\text{ج} ۳}$$

$$(۲۵) \text{ج} ۱ (۱+۲) - \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲) = \text{ج} ۱ (۱+۲) - \text{ج} ۲ (۱+۲) + \text{ج} ۳ (۱+۲)$$



$$(۲۶) \text{ جم } ۱۰ + \text{ جم } ۱۸ + \text{ جم } ۱۷ + \text{ جم } ۱۲ = ۸ \text{ جم } ۱۳$$

$$(۲۷) \text{ مم } ۱ + \text{ مم } ۱۲ + \text{ مم } ۱۸$$

$$= \text{ جم } ۱۷ (۲ + ۲ + ۳ \text{ جم } ۱۲)$$

$$(۲۸) \text{ قم } ۱ = \text{ قم } ۱ - \text{ جب } ۱ - \text{ جم } ۱۳ + \text{ جب } ۱۳$$

$$(۲۹) \text{ جم } ۱۲ = (\text{ جم } ۱ - \text{ جب } ۱) + ۲ + \text{ جم } ۱۳ - \text{ جب } ۱۳ (\text{ جم } ۱ - \text{ جب } ۱)$$

$$(۳۰) \text{ جم } ۱ - \text{ جب } ۱ = \text{ جم } ۱۲ - (۱ - \text{ جب } ۱۲)$$

ان مساواتوں کو حل کرو

$$(۳۱) \text{ مس } (۱ - \frac{۱}{۳}) + \text{ مم } (۱ - \frac{۱}{۳}) = ۲$$

$$(۳۲) \text{ جب } ۱۲ + \text{ جب } ۱۲ = ۰ \text{ (۳۳) جب } ۱۲ - \text{ جب } ۱۲ = \text{ جب } ۱۲$$

$$(۳۴) \text{ جب } ۱۲ + \text{ جم } ۱۲ = \frac{۱}{۳} \text{ (۳۵) جب } ۱۲ = ۱۶ \text{ جب } ۱۲$$

$$(۳۶) \text{ جم } ۱۲ + \text{ جم } ۱۲ + \text{ جم } ۱۲ = ۰ \text{ (۳۷) جب } ۱۲ + \text{ جب } ۱۲ + \text{ جب } ۱۲ = ۰$$

$$(۳۸) \text{ مس } ۱ + \text{ مس } (۱ - \frac{۱}{۳}) = ۲ \text{ (۳۹) مس } ۱۲ = ۸ \text{ جم } ۱۲ - \text{ مم } ۱۲$$

$$(۴۰) \text{ مس } (۱ - \frac{۱}{۳}) = ۳ \text{ مس } (۱ - \frac{۱}{۳})$$

## ساتواں باب

زاویوں کی قیمت کے قوانین

$$(۹۵) \text{ دفعہ } ۱۲ \text{ میں } ۱ \text{ کو } \frac{۱}{۳} \text{ سے بدل دو تو یہ حاصل ہوگا کہ}$$

$$\text{ جم } ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } ۱ = \frac{۱}{۳} = ۲ \text{ جم } ۱ - \frac{۱}{۳}$$

$$\text{ جب } ۱ = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} \text{ (۹۶) جم } ۱ = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

(۹۶) چونکہ خبر کے اول ہم علامت جمع اور منفی دونوں دفعہ گذشتہ میں مقرر کر سکتے ہیں تو اسے معلوم

کہ جم ۱ کی ایک قیمت کے موافق دو قیمتیں جب  $\frac{۱}{۳}$  اور دو قیمتیں جم  $\frac{۱}{۳}$  کی تکلیف اور دلیل اسکی یہ ہے کہ اگر ایک زاویہ ہو جسکی جب التمام معلوم ہو تو صورت ۲ ان کہ  $\pm$  سین

وہ سب زاویے داخل ہیں جو حیب الہام معلوم کرتے ہیں جس کے معلوم ہو کہ جس جملہ میں قیمت  
جب ہے کی جب سے کی رقموں میں معلوم ہوگی اس سے قیمت اون زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ کی  
معلوم ہوگی جو صورت  $\frac{1}{2}$  (۲۱ کہ  $\pm$  سے) میں داخل ہیں اب

$$\text{جب (ن کہ } \pm \frac{1}{2}) = \text{جب ن کہ جم } \frac{1}{2} \pm \text{جم ن کہ جب } \frac{1}{2}$$

$$= \pm \text{جم ن کہ جب } \frac{1}{2} = \pm \text{جب } \frac{1}{2}$$

پس دو قیمتیں نکلتی ہیں جنہیں فرق علامت کا ہوتا ہے

اور علیٰ ہذا التیاس جس جملہ میں قیمت جم ہے کی جم سے کی رقموں میں معلوم ہوگی اس سے قیمت اون  
زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ کی حیب الہام معلوم ہوگی جو صورت  $\frac{1}{2}$  (۲۱ کہ  $\pm$  سے) میں داخل ہیں

$$\text{اب جم (ن کہ } \pm \frac{1}{2}) = \text{جم ن کہ جم } \frac{1}{2} \pm \text{جب ن کہ جب } \frac{1}{2}$$

$$= \text{جم ن کہ جم } \frac{1}{2} = \pm \text{جم } \frac{1}{2}$$

پس دو قیمتیں نکلتی ہیں جنہیں صرف علامت کا فرق ہوتا ہے

(۹۷) اگر جم معلوم ہو اور اس کے ساتھ کوئی اور بات ۱ کی اب میں معلوم ہو تو علامت کا اشتباہ

دفعہ ۹۵ کا دور نہیں ہو سکتا ہے یہاں پر شبہ میں رہیگا کہ علامت جمع کی ہی یا منفی کی لیکن اگر ۱

نہ خود معلوم ہو تو ہے بھی معلوم ہوگا تو کم و دریافت ہو جائیگا کہ جب ہے مثبت ہے یا منفی اور نیز جم ہے

مثبت ہے یا منفی اسے یہ معلوم ہو جائیگا کہ جذر مقدار پر کیا علامت لینی چاہئے یا فقط یہ بات

معلوم ہو کہ کونسی وجہ میں ہے واقع ہوتا ہے تو یہی مناسب علامت معلوم ہو جائیگی شلکہ اگر ہے

زاویہ درمیان ۱۸۰ اور ۲۷۰ کے واقع ہو تو اسکی دو حیب اور حیب الہام منفی مقدار ہوگی

$$(۹۸) \text{ ہر جب دفعہ } ۸۲ \text{ کے جب } ۱ = ۲ \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2}$$

$$\text{اور نیز } ۱ = \text{جب } \frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2}$$

$$\text{پس } (\text{جب } \frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2}) = ۱ + \text{جب } ۱$$

$$(\text{جب } \frac{1}{2} - \text{جم } \frac{1}{2}) = ۱ - \text{جب } ۱$$

$$(۱) \quad \text{اسی واسطے جب } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{جب } (1 + \text{جب } 1)$$

$$(۲) \quad \text{جب } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \quad \text{جب } (1 - \text{جب } 1)$$

$$\text{اسی واسطے } ۲ \text{ جب } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{جب } (1 + \text{جب } 1)$$

$$\text{اور } ۲ \text{ جب } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \quad \text{جب } (1 - \text{جب } 1)$$

(۹۹) دفعہ مذکور میں مساوات (۱) اور (۲) میں ہر مقدار کو جنہر خذ کی علامت ہو مثبت اور

منفی فرض کر سکتے ہیں اسی واسطے جب کہ ایک قیمت کے موافق چار قیمتیں جم کر  $\frac{1}{r}$  اور چار

قیمتیں جب  $\frac{1}{r}$  کی دریافت ہو گئیں اور دلیل اس کی یہ ہو سکتی ہے کہ اگر سہ کوئی زاویہ ہو

جو جب معلوم رکھتا ہو تو صورت کہ  $(-1)$  سے میں سب زاویے داخل میں چل جائیں

جو جب معلوم ہے پس جس جملہ میں جب  $\frac{1}{r}$  کی جب سہ کی رقموں میں معلوم ہوگی اس سے قیمت

اور ان زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ کی معلوم ہوگی جو صورت  $\frac{1}{r} (1 + (-1) \text{ سے } )$  میں

داخل ہیں اول فرض کرو کہ ان قیمت ہی اور  $\frac{1}{r}$  م کی برابر ہے

$$\text{تو جب } \frac{1}{r} [1 + (-1) \text{ سے } ] = \text{جب } (\pm \text{ م کہ } + \text{ کہ } - \text{ سے } ) =$$

$$\text{جب م کہ جم کہ } - \text{ سے } + \text{ جم م کہ جب کہ } - \text{ سے } =$$

$$= \text{جم م کہ جب کہ } - \text{ سے } = \pm \text{ جب } - \text{ سے } =$$

اب فرض کرو کہ ان طاق ہو اور  $\frac{1}{r}$  م + ا کی برابر ہو تو

$$\text{جب } \frac{1}{r} [1 + (-1) \text{ سے } ] = \text{جب } (\text{م کہ } + \text{ کہ } - \text{ سے } ) =$$

$$= \text{جب م کہ جم کہ } - \text{ سے } + \text{ جم م کہ جب کہ } - \text{ سے } =$$

$$= \text{جم م کہ جب کہ } - \text{ سے } = \pm \text{ جب کہ } - \text{ سے } = \pm \text{ جم } - \text{ سے } =$$

پس نصف زاویہ کی جب کی چار قیمتیں میں زاویہ کی جب معلوم ہے لکھیں گے

علیٰ بن ابی اسحاق جس جملہ میں قیمت جم  $\frac{1}{r}$  کی جب سہ کی رقموں میں معلوم ہوگی اور قیمت

ہر ایک زاویہ کی اول ان زاویوں میں سے معلوم ہوگی جو صورت  $\frac{1}{r} [1 + (-1) \text{ سے } ]$  میں

داخل ہیں اول فرض کرو کہ ن جفت ہو اور برابر ۲م کے ہو تو  

$$\text{جم } \frac{1}{2} [\text{ن کر} + (-1) \text{سے}] = \text{جم} (\text{م کر} + \frac{1}{2} \text{سے}) = \text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} - \text{جم م کر جب } \frac{1}{2} \text{سے}$$

$$\text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} = \text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} \pm \text{جم } \frac{1}{2} \text{سے}$$

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہو اور ۲م + ۱ کی برابر ہو تو

$$\text{جم } \frac{1}{2} [\text{ن کر} + (-1) \text{سے}] = \text{جم} (\text{م کر} + \frac{1}{2} \text{سے}) = \text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} - \text{جم م کر جب } \frac{1}{2} \text{سے}$$

$$= \text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} = \text{جم م کر} \frac{1}{2} \text{سے} \pm \text{جم } \frac{1}{2} \text{سے}$$

پس جو قوت کہ زاویہ کی جیب معلوم ہو تو اس سے نصف زاویہ کی جیب کی چار قیمتیں نکالیں گے  
 (۱۰۰) اگر صرف جب ۱ معلوم ہو اور کوئی اور بات اس کے باب میں نہ معلوم ہو تو دفعہ ۱۹ میں علامت کا اشتباہ دور نہیں ہو سکتا لیکن اگر خود معلوم ہو یا فقط ہم یہ سمجھ جائیں کہ وہ کسی ربع میں واقع ہے تو مناسب علامتیں ہم تحقیق کر سکتے ہیں اس واسطے کہ ہم ہر خاص صورت میں یہ معلوم کر سکتے ہیں

$$(۱) \quad \text{جب } \frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{جب } 1}$$

$$(۲) \quad \text{جب } \frac{1}{2} - \text{جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 - \text{جب } 1}$$

اب مثلاً فرض کرو کہ ۱ درمیان ۰ اور ۹۰ کے واقع ہے تو  $\frac{1}{2}$  درمیان ۰ اور ۴۵ کے واقع ہوگا اس واسطے ہم  $\frac{1}{2}$  اور جب  $\frac{1}{2}$  دونوں مثبت ہیں اور جم  $\frac{1}{2}$  بڑا نہ نسبت جب  $\frac{1}{2}$  کی ہے اسے معلوم ہوا کہ (۱) میں رکن بائیں طرف کا مثبت مقدار عا اس واسطے علامت مثبت لینی چاہئے اور (۲) میں رکن بائیں طرف کا منفی مقدار ہے اور اس واسطے علامت (۲) میں لینی چاہئے اس واسطے اگر ۱ درمیان ۰ اور ۹۰ کے واقع ہو تو

$$\text{جب } \frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{جب } 1}$$

$$\text{جب } \frac{1}{2} - \text{جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 - \text{جب } 1}$$

$$\text{اس واسطے جب } \frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{جب } 1} - \text{جب } 1$$

$$\text{۲م جم } \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{جب } 1} + \pm \sqrt{1 - \text{جب } 1}$$

ایک اور مثال کے واسطے فرض کرو کہ ۱۰۰ اور ۲۰ کے درمیان واقع ہو تو ۵۳۰ اور ۱۸۰ کے درمیان ۱۰۰ واقع ہوگا اس واسطے جم ۱۰۰ منفی ہے اور جب ۱۰۰ مثبت ہے اور جم ۱۰۰ تعداد بڑی جب ۱۰۰ سے ہر اسے معلوم ہوگا کہ (۱) میں رکن بائیں طرف کا منفی مقدار ہے اس واسطے کہ کو منفی علامت (۱) میں لینی جائے اور (۲) میں رکن بائیں طرف کا مثبت مقدار ہے اس واسطے کہ کو مثبت علامت لینی جائے اس واسطے اگر ۱۰۰ درمیان ۲۰ اور ۲۰ کے واقع ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\sqrt[n]{(1+j)^n} = 1 + \frac{j}{n} + \dots$$

$$\sqrt{(1-j)} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[n]{(1+j)} + \sqrt[n]{(1-j)} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(1+\frac{1}{2})} - \sqrt{(1-\frac{1}{2})}$$
 (۱۰۱) ایک صورت عامہ علامات جب  $\frac{1}{2} + \text{جم } \frac{1}{2}$  اور جب  $\frac{1}{2} - \text{جم } \frac{1}{2}$  کے بیان کرنی  
 اس واسطے کہ

$$\text{جب } \frac{1}{r} + \text{جب } \frac{1}{r_h} = \frac{1}{r} \text{ جب } \frac{1}{r_h} \quad r_h = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_h}} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_h}}$$

$$= \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \text{ جی}$$

اب جب  $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n})$  مثبت ہے اگر  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

درمیان ۲ کہ اور (۱ + ۲) کہ کے درمیان واقع ہو اور منفی ہو اگر  $\frac{1}{n}$  +  $\frac{1}{n}$  کہ  
درمیان (۱ + ۲) کہ اور (۲ + ۲) کہ کے درمیان واقع ہو اس میں صفر یا کوئی  
مثبت منفی صحیح عدد پس جب  $\frac{1}{n}$  + جم  $\frac{1}{n}$  مثبت ہے اگر  $\frac{1}{n}$  درمیان ۲ کہ -  $\frac{1}{n}$  کہ  
اور ۲ کہ +  $\frac{1}{n}$  کہ کے درمیان واقع ہو اور منفی ہے اگر  $\frac{1}{n}$  درمیان ۲ کہ +  $\frac{1}{n}$  کہ  
اور ۲ کہ +  $\frac{1}{n}$  کہ کے علیٰ القیاس جب  $\frac{1}{n}$  - جم  $\frac{1}{n}$  تمام جب ( $\frac{1}{n}$  -  $\frac{1}{n}$ ) کہ  
اسے ہم بہت بخوبی نکالتے ہیں کہ جب  $\frac{1}{n}$  - جم  $\frac{1}{n}$  مثبت ہو اگر  $\frac{1}{n}$  درمیان ۲ کہ +  $\frac{1}{n}$  کہ اور

۲۸ کہ + ۱۵ کہ واقع ہوا درستی ہے اگر  $\frac{1}{4}$  در بیان ۲۸ کہ +  $\frac{1}{4}$  کہ اور ۲۸ کہ +  $\frac{1}{4}$  کہ

(۱۰۲) بموجب دفعہ ۹۵ کے مس  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  مس  $\frac{1}{4}$

مس ۱ کے جگہ ج کو لکھو تو ج مس  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$  مس  $\frac{1}{4} = ۰$

اسی طرح مس  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

(۱۰۳) اب دلیل اس بات کی کہ نصف زاویہ کے ماس کی قیمتیں کیوں ایک قیمت معلوم سے نکلتی ہیں

یہ ہے کہ اگر سے کوئی زاویہ ہو جو ماس معلوم رکھتا ہو تو صورت ن کہ + سے میں سب زاویہ

وہ داخل ہیں جو یہ ماس معلوم رکھتے ہیں اسی طرح جس جگہ سے قیمت مس ہے کی

مس سے کی رقموں میں معلوم ہوتی ہے او سے اون زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ ماس

کی قیمت معلوم ہوگی جو صورت  $\frac{1}{4}$  (ن کہ + سے) میں داخل ہیں اول فرض کرو کہ نصف

ہو اور برابر ۲ کے ہو تو مس  $\frac{1}{4}$  (ن کہ + سے) = مس (م کہ + سے) = مس  $\frac{1}{4}$

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہو اور برابر ۲ م + ا کی ہو تو

مس  $\frac{1}{4}$  (ن کہ + سے) = مس (م کہ + سے) = مس  $\frac{1}{4}$  (ن کہ + سے)

مس (ن کہ + سے) = مس  $\frac{1}{4}$

پس دو قیمتیں ماس نصف زاویہ کی معلوم ہونگیں اگر ماس زاویہ کا معلوم ہو

(۱۰۴) اگر مس ۱ معلوم ہو اور کوئی بات ۱ کے باب میں معلوم ہو تو علامت کا اشتباہ

دفعہ ۱۰۲ میں ہی طرح دور نہیں ہو سکتا لیکن اگر خود ہو یا فقط یہ معلوم ہو کہ  $\frac{1}{4}$  کے ربع

میں واقع ہے تو ہم اس بات کو جان سکتے ہیں کہ مس  $\frac{1}{4}$  مثبت ہو یا منفی اور کوئی

علامت ہم کو مقرر کرنی چاہئے

(۱۰۵) بموجب دفعہ ۹۱ کے جم ۱ = جم  $\frac{1}{4}$  - جم  $\frac{1}{4}$

اگر جم ۱ معلوم ہو تو جم  $\frac{1}{4}$  کے دریافت کر نیکی واسطے ایک مجموعی سلوات حاصل ہوگی اور دلیل

اسکی توافق سابق کے ہے اس واسطے کہ اگر سے ایک زاویہ ہو جسکی جیسا تمام معلوم ہو

تو صورت ۲ کہ  $\pm$  سین وہ سب زاویے داخل ہیں جو جیب النمام معلومہ رکھتی ہیں  
اس واسطے جس جگہ سے قیمت حجم  $\frac{1}{2}$  کی جسم سے کی قیون میں معلوم ہوگی اوسے  
اون زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ کی جیب النمام کی قیمت معلوم ہوگی جو صورت  
 $\frac{1}{2}$  (۲ کہ  $\pm$  سین) میں داخل ہیں اب ان کی صورت ان تین صورتوں ۳ م اور ۳ م + ۱  
اور ۳ م - ۱ میں سے ایک نہ ایک ہوگی اول فرض کرو کہ  $n = 3$  م تو  
جسم  $\frac{1}{2}$  (۲ کہ  $+$  سین) = حجم (۲ کہ  $\pm$  سین) = جسم  $\frac{1}{2}$   
دوم فرض کرو کہ  $n = 3$  م + ۱ تو

جسم  $\frac{1}{2}$  (۲ کہ  $\pm$  سین) = حجم (۲ کہ  $+$  سین) = جسم  $\frac{1}{2}$  کہ  $\pm$  سین  
آخر فرض کرو کہ  $n = 3$  م - ۱ تو  
جسم  $\frac{1}{2}$  (۲ کہ  $\pm$  سین) = حجم (۲ کہ  $-$  سین) = جسم  $\frac{1}{2}$  کہ  $\pm$  سین  
پس اس طرح تین قیمتیں ہیں  $\frac{1}{2}$  جسم  $\frac{1}{2}$  کہ  $+$  سین اور جسم  $\frac{1}{2}$  کہ  $-$  سین واقع ہوتے ہیں  
(۱۰۶) بموجب دفعہ ۹ کے جب ۱ = ۲ جب  $\frac{1}{2}$  - ۲ جب  $\frac{1}{2}$  ۱  
پس اگر جب ۱ معلوم ہو تو جب  $\frac{1}{2}$  کی قیمت دریافت کرنے کے واسطے ایک مساوات تیسرے  
درجہ کی حاصل ہوگی اور دلیل اوسکی واسطے موافق سابق کے قائم ہو سکتی ہے

## مثالین

(۱) اگر درمیان ۵۰° اور ۳۰° واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$2 \text{ جب } \frac{1}{2} = - \frac{1}{2} (1 + \text{جب } 1) - \frac{1}{2} (1 - \text{جب } 1)$$

(۲) جب کہ  $\frac{1}{2}$  درمیان ۵۰° اور ۴۵° کے واقع ہو تو حجم  $\frac{1}{2}$  کو جب ۱ کی قیون میں بیان کرو  
(۳) جب کہ  $\frac{1}{2}$  درمیان ۵۰° اور ۳۵° کے درمیان واقع ہو تو حجم  $\frac{1}{2}$  کو جب ۱ کی قیون میں بیان کرو  
(۴) بتاؤ کہ کن حدود کے درمیان واقع ہو کہ

$$2 \text{ جب } 1 = - \frac{1}{2} (1 + \text{جب } 1) + \frac{1}{2} (1 - \text{جب } 1)$$

$$\text{اور } 2 \text{ جسم } 1 = - \frac{1}{2} (1 + \text{جب } 1) - \frac{1}{2} (1 - \text{جب } 1)$$

۶۷ کن حدوں کے درمیان واقع ہو کہ

$$(۵) \text{ بناو کہ } ۱ \text{ کن حدوں کے درمیان واقع ہو کہ}$$

$$۲ \text{ جم } ۱ = ۱ - \sqrt{(۱ + \text{جب } ۱۲)} + \sqrt{(۱ - \text{جب } ۱۲)} \text{ کے ہو}$$

(۶) بناو کہ ۱ کن حدوں کے درمیان واقع ہو کہ

$$۲ \text{ جب } ۱ = \sqrt{۱ + \text{جب } ۱۲} - \sqrt{۱ - \text{جب } ۱۲}$$

(۷) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دو کہ اس کے جیبوں میں نسبت معلوم ہو

(۸) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دو کہ اس کے جیب التماموں میں نسبت معلوم ہو

(۹) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دو کہ اس کے ماسوں میں نسبت معلوم ہو

(۱۰) معلوم ہے کہ مس  $\frac{1}{2} = ۲ - ۲۸$  قیمت جب ۱ کی دریافت کرو

(۱۱) جب  $۱۰ = ۱ - \frac{1}{2}$  تو جم  $۱۰$  کی دریافت کرو

(۱۲) معلوم ہے کہ مس  $۱۲ = ۱ - ۲۸$  قیمت جب ۱ اور جم  $۱$  کی دریافت کرو

(۱۳) مس  $۱۴۵$  قیمت مس  $۲۳۰$  کی قیمت سے دریافت کرو

$$(۱۴) \text{ ثابت کرو کہ مس } \frac{1}{2} = \frac{\text{جب } ۱ - \text{جب } ۱۲}{\text{جب } ۱ + \text{جب } ۱۲}$$

$$(۱۵) \text{ جم } (۱ - ۱۸۰) = ۲ \text{ جم } \frac{1}{2} (۱ + ۱۸۰) \text{ جم } \frac{1}{2} (۱ - ۱۸۰)$$

$$(۱۶) (\text{جم } ۱ + \text{جم } ب) + (\text{جب } ۱ + \text{جب } ب) = ۲ \text{ جم } \frac{1}{2} (۱ - ب)$$

$$(۱۷) (\text{جم } ۱ - \text{جم } ب) + (\text{جب } ۱ - \text{جب } ب) = ۲ \text{ جب } \frac{1}{2} (۱ - ب)$$

$$(۱۸) \text{ ثابت کرو کہ جب } ۲۲ = \frac{1}{2} \text{ جم } ۲۲ = \frac{۲۸ - ۲۸}{۲} = \frac{۲۸ + ۲۸}{۲}$$

$$\text{اور مس } ۲۲ = \frac{1}{2} (۱ - ۲۸)$$

$$(۱۹) \text{ مس } \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\text{قط } ۱ + \text{قط } ۱}{\text{قط } ۱ - \text{قط } ۱}$$

$$(۲۰) \text{ مس } \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\text{قط } ۱ + \text{قط } ۱}{\text{قط } ۱ - \text{قط } ۱}$$

$$(۲۱) \text{ جب } \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \text{جم } \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\text{جب } ب}{\text{جم } ب}$$

$$(۲۲) (۱ + \text{جب } ب) = ۱ + ۲ \text{ جب } \frac{1}{2} (۱ - \text{جب } ب)$$





$$\frac{1 - \delta h}{\sqrt{}} = 98 \text{ جب}$$

$$\frac{\delta h + 1.0}{\sqrt{}} = 18 \text{ جب } 1.0 = 18 \text{ جب}$$

(۱۰۸) ۳۶ کے زاویہ کی جیب اور جیب التمام دریافت کرو

$$\text{جم } 36 = 1 - 2 \text{ جیب } 18 = 1 - \left( \frac{1 - \delta h}{\sqrt{}} \right)^2 = \frac{\delta h + 1}{\sqrt{}}$$

$$\text{جب } 36 = \sqrt{1 - (1 - \text{جم } 36)^2} = \delta h + 1.0$$

(۱۰۹) اسے ۵۴ اور ۲ کے زاویوں کی بھی علم شلتی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں

اسوے کے جب ۵۴ = جم ۳۶ اور جم ۵۴ = جب ۳۶ اور جب ۱۸ = جم ۱۸ اور جم ۵۴ = جب ۱۸

(۱۱۰) وجہ اس بات کی کہ دفعہ ۱۰ امین کیوں دو نتیجے حاصل ہو رہے ہیں کہ مساوات جب ۱۸ = جب ۳۶

کی علاوہ ۱۸ کے اور زاویوں کے واسطے بھی موضوع ہے اسکو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{جم } 18 = (90 - 72) = 18$$

اسے یہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ ۹۰ - ۷۲ کی تو برابر ۱۸ کے ہوا یا دون زاویوں میں سے جسکی جیب

وہی ہے جو ۱۸ کی جیب التمام ہے ایک زاویہ ہو تو قیمت ۱۸ کی جو ایسی موقع پر داخل ہو سکتی

ہے اس مساوات سے دریافت ہوگی کہ

$$90 - 72 = 18 = 18 \times 40.0 \pm 18$$

اسین ان صفریا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

$$\text{بس } 1 = 90 - 72 \times 40.0$$

تھیلہ اگر ۰ = ۰ تو نسب نمایین علامت زیرین یعنی چائے پس ۱۸ = ۹۰ کے حاصل ہوگا

اور اس قیمت سے جم ۱۸ = کے ہو جائیگی یہی وجہ تھی کہ دفعہ ۱۰ امین جم ۱۸ کی خبر نہ تھی

ظاہر ہوا تھا اور ہم نے اسکو تقسیم کرنے سے ساقط کر دیا تھا

اب اگر یہ ۱۸ = اس کے لکھیں اور نسب نمایین اوپر کی علامت لیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$1 = 90 - 72 = 18 \text{ اور جب } (54 - 18) = 36 \text{ جب } 54 = 36 \text{ جم } 36 = \frac{\delta h + 1}{\sqrt{}}$$

یہی وجہ تھی کہ دفعہ ۱۰۷ میں مساوات درجہ دوم کی اور تین علاوہ اس قیمت کے جسکو

ہم استعمال میں لائے پیدا ہوتی تھیں

(۱۱۱) ۹ کے اور ۸ کے زاویوں کے جیب اور جیب التمام دریافت کرو

بحسب دفعہ ۱۰۰ کے

$$\begin{aligned} \sqrt{(5h+3)} &= \sqrt{(18 \text{ جب} + 1)} = 9 \text{ جم} + 9 \text{ جب} \\ \sqrt{(5h-5)} &= \sqrt{(18 \text{ جب} - 1)} = 9 \text{ جم} - 9 \text{ جب} \\ \frac{(\sqrt{(5h-5)} - \sqrt{(5h+3)})}{2} &= 9 \text{ جب} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(5h-5)} + \sqrt{(5h+3)} = 9 \text{ اور جم}$$

اور جب ۸ = جم ۹ اور جم ۸ = جب ۹  
غرض ہم نے محلے زوایاں مفصلہ ذیل کے جیب اور جیب التمام کے واسطے دریافت کیے

۹ و ۱۵ و ۱۸ و ۳۰ و ۳۶ و ۴۵ و ۵۴ و ۶۰ و ۶۳ و ۷۵ و ۸۴ و ۹۰ و ۹۶ و ۱۰۸ و ۱۲۰  
(دفعات ۳۶ و ۳۷ و ۴۲ و ۴۷ و ۵۲ و ۵۷ و ۶۲ و ۶۷ و ۷۲ و ۷۷ و ۸۲ و ۸۷ و ۹۲ و ۹۷ و ۱۰۲ و ۱۰۷ و ۱۱۲)

چونکہ ۳۰ - ۱۸ = ۱۲ اس واسطے ہم بحسب دفعہ ۷۷ کے جیب اور جیب التمام سے  
دریافت کر سکتے ہیں اور یہ دفعہ ۷۷ اور ان نتائج سے جو ابھی حاصل ہوئی ہیں  
جیب اور جیب التمام اور ان زاویوں کی جو اس سلسلہ ۳۰ و ۹ و ۱۲ و غیرہ  
میں داخل ہیں دریافت کر لینگے

(۱۱۲) دفعات ۸ و ۹ میں جب ۲ اور جم ۲ اور جب ۳ اور جم ۳ کے جیب  
ارتقام جب ۱ اور جم ۱ میں بیان کیا ہے اور اس طرح جیب اور جیب التمام ۴ اور ۵  
۵ اور غیرہ کو بھی بیان کر سکتے ہیں

$$\text{اس واسطے کہ جب } (1+n) \text{ اور جب } (n-1) = 1 \text{ جب } n \text{ اور جم } 1$$

اسی واسطے جب (ن + ۱) = ۱ جب ن ۱ جم - جب (ن - ۱) = ۱  
 فرض کرو کہ ن = ۳ تو جب ۴ = ۱ جب ۳ ۱ جم - جب ۱۲  
 // ن = ۴ تو جب ۵ = ۱ جب ۴ ۱ جم - جب ۱۳  
 اور علی ہذا اقیاس تواتر جب ۴ ۱ اور جب ۵ ۱ وغیرہا کی جب اور جب التمام کے رقموں  
 بیان ہو سکتی ہیں اور اس طرح یہ صورت قانونی ہے کہ

جم (ن + ۱) = ۱ + جم (ن - ۱) = ۱ + ۲ جم ن ۱ جم  
 جم ۴ ۱ و جم ۵ ۱ وغیرہا کے دریافت کرنے کے لئے کام میں آسکتے ہیں  
 اس ضمنوں کو پہر لکھینگے اور اس میں عام طور پر جب اور جب التمام ن کی لکی جب اور  
 جب التمام کی رقموں میں بیان کریں گے اور اس میں ن کی صحیح قیمت صحیح عدد ہوگا  
 (۱۱۳) یہ بات آسان ہے کہ کسی مرکب زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کو اس کی افراد کے  
 علم مثلثی نسبتوں میں بیان کریں

جب (۱ + ب + س) = جب (۱ + ب) جم س + جم (۱ + ب) جب س  
 = جب ۱ جم ب جم س + جب ب جم س جم ۱  
 + جب س جم ۱ جم ب - جب ۱ جب ب جب س  
 جم (۱ + ب + س) = جم (۱ + ب) جم س - جب (۱ + ب) جب س  
 = جم ۱ جم ب جم س - جم ۱ جب ب جب س - جم ب جب ۱ جب س  
 س (۱ + ب + س) = جب (۱ + ب + س) جم (۱ + ب + س)

جب ۱ جم ب جم س + جب ب جم س جم ۱ + جب س جم ۱ جم ب - جب ۱ جب ب جب س  
 جم ۱ جم ب جم س - جم ۱ جب ب جب س - جم ب جب ۱ جب س - جم ب جب ۱ جب س  
 آخر جگہ کے شمار کنندہ اور نسب نا کو جم ۱ + جم ب + جم س برقیتم کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ  
 س (۱ + ب + س) = س ۱ + س ب + س س ۱ + س س ۱ + س س ب + س س س ۱ + س س س ب  
 ب اور س میں سے ہر ایک برابر ۱ کے فرض کرو تو

مس ۳۱ = مس ۱ - مس ۳۰  
(۱۱۴) جب تین یا زیادہ زاویوں میں باہم کوئی ربط ہو تو اونکی علم مثلثی نسبتوں میں ایک سے  
ربط دریافت ہو سکتا ہے مثلاً اگر

$$ا + ب + س = ۱۸۰ \text{ تو یہ حاصل ہوگا کہ}$$

$$جب ا + ب + ج = س = ۱۸۰ \text{ جب ا + ج = ب}$$

$$\text{اسی واسطے کہ جب ا + ب = ج = ۱۸۰ (ب + ج) = ا = ۱۸۰ (ا + ج) = ب}$$

$$\text{اور جب ا + س = ۱۸۰ (ا + س) = ب = ۱۸۰ (ب + س) = ا}$$

$$\text{اسی واسطے کہ جب ا + ب + ج = س = ۱۸۰ (ا + ب + ج) = س}$$

$$\text{اور جب ا + ب + ج = س = ۱۸۰ (ا + ب + ج) = س}$$

$$\text{اب اگر پہلا + ب + س = ۱۸۰ تو}$$

$$\text{جب ا + ج = ب = ۱۸۰ (ا + ج) = ب}$$

$$\text{اسی واسطے کہ جب ا + ج = ب = ۱۸۰ (ا + ج) = ب}$$

$$\text{جب ا + ج = ب = ۱۸۰ (ا + ج) = ب}$$

$$\text{اور جب ا + ج = ب = ۱۸۰ (ا + ج) = ب}$$

$$\text{جب ا + ج + ب = س = ۱۸۰ (ا + ج + ب) = س}$$

$$\text{ا + ج + ب = س = ۱۸۰ (ا + ج + ب) = س}$$

$$\text{ا + ج + ب = س = ۱۸۰ (ا + ج + ب) = س}$$

$$\text{اب اگر پہلا + ب + س = ۱۸۰ تو}$$

$$\text{س + ا + ب = س = ۱۸۰ (س + ا + ب) = س}$$

$$\text{اسی واسطے کہ س + ا + ب = س = ۱۸۰ (س + ا + ب) = س}$$

$$\text{بموجب دفعہ ۱۱۳ کے س + ا + ب + ج = س = ۱۸۰ (س + ا + ب + ج) = س}$$



$$(۳) \text{ جب (سه - صد) + جب (صد - مر) + جب (بر - سه) } \\ + \frac{\text{م جب سه - صد جب م - مر جب م - سه}}{۲} = ۰$$

$$(۴) \text{ م جب (بر - سه) جب (م - مر - سه) جم (بر - م - بر) } \\ = ۱ + \text{جم (۲ م - ۲ م بر) - جم (۲ بر - ۲ سه) - جم (۲ م - ۲ م سه)}$$

$$(۵) \text{ جب (سه + صد) جم صد - جب (سه + مر) جم مر = جب (صد - مر) جم (سه + صد + مر) } \\ (۶) \text{ جم (۱ + ب + س) + جم (۱ + ب - س) + جم (۱ + س - ب) + جم (ب + س - ۱) } \\ = ۴ \text{ جم ۱ جم ب جم س}$$

$$(۷) \text{ جم ۲ سه + جم ۲ صد + جم ۲ مر = م جم (سه + صد) جم (صد + مر) جم (مر + سه) } \\ - \text{جم ۲ (سه + صد + مر)}$$

$$(۸) \text{ جب (۱ - ب) جب (۱ - س) + جب (ب - س) جب (ب - ۱) + } \\ + \frac{\text{جب س}}{\text{جب س}} + \frac{\text{جب (س - ۱) جب (س - ب)}}{۲} = ۰$$

$$(۹) \text{ جم (سه + صد) جب صد - جم (سه + مر) جب مر } \\ = \text{جب (سه + صد) جم صد - جب (سه + مر) جم مر}$$

$$(۱۰) \text{ جب (سه + صد - ۲ م) جم صد - جب (سه + مر - ۲ صد) جم مر } \\ = \text{جم (صد - مر) [جم (صد + مر - سه) + جم (سه + مر - صد) + جم (سه + صد - مر)]}$$

$$(۱۱) \text{ جب (۱ + ب + س) جب ب = جب (۱ + ب) جب (ب + س) - جب (۱) جب س}$$

$$(۱۲) \text{ جب سه جب صد جب (صد - سه) + جب صد جب مر جب (مر - صد) } \\ + \text{جب مر جب سه جب (سه - مر) + جب (صد - سه) جب (مر - صد) جب (سه - مر) = ۰}$$

$$(۱۳) \text{ جم (سه + صد) جب (سه - صد) + جم (صد + مر) جب (صد - مر) } \\ + \text{جم (مر + فر) جب (مر - فر) + جم (فر + سه) جب (فر - سه) = ۰}$$





(۳۱)  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$   
 (۳۲)  $\text{جب} + \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} + \text{جب}$   
 اگر ن چیم عدد ۴ م + ۱ اور ۴ م + ۳ کی صورت کا ہو  
 (۳۳)  $\text{جب} + \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} + \text{جب}$   
 اگر ن صحیح ۴ م یا ۴ م + ۲ کی صورت کا ہو  
 (۳۴)  $\text{جم} + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$   
 (۳۵)  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$   
 = قطب قطب قطب قطب

(۳۶) اگر چار زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہو تو اوکے ماسوں کا مجموعہ برابر دین کے تین تین ماسوں کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے ہوگا

(۳۷) اگر  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$  تو ثابت کرو کہ  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$   
 (۳۸) معلوم ہے کہ  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$   
 تو ثابت کرو کہ  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$   
 (۳۹) اگر  $\text{جم} + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$  اور  $\text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم}$  تو  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$   
 تو ثابت کرو کہ  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$   
 (۴۰) اگر  $\text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم}$  اور  $\text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم}$   
 جب  $\text{سہ} = ۲$  جب  $\text{سہ} = ۲$  تو ثابت کرو کہ  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$   
 (۴۱) اگر  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$  تو ثابت کرو کہ  
 $\text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم}$   
 (۴۲) اگر  $\frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس}} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \text{مس}$   
 (۴۳) اگر  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$  اور  $\text{مس} + \text{مس} = \text{مس} + \text{مس}$

نوٹس آٹھ کی ایک قیمت مس سہ + تینے مس سہ ہے  
 (۴۴) اگر جوہر التام سہ اور مر کی سطح ربط دی جائیں کہ  
 ۱۔ جم سہ۔ جم صہ۔ جم م + ۲ جم سہ جم صہ جم م۔ تو ان زاویوں کا ربط باہمی  
 (۴۵) اگر نکس (سہ + سہ) = مس (بر + صہ) = مس (۲ + م) تو  

$$\frac{ل + ۵}{ل - ۵} جب (سہ - صہ) + \frac{۵ + ی}{۵ - ی} جب (صہ - م) + \frac{ی + ل}{ی - ل} جب (م - سہ)$$
  
 (۴۶) اگر مس سہ + مس م = ۱ اور جب سہ = جب صہ  
 تو ثابت کرو کہ جب بر =  $\frac{۱}{(۱ + جم سہ جم صہ)}$   
 (۴۷) اگر جب (۲ - سہ) = مٹن اور جم (م - سہ) =  $\frac{ط}{ص}$   
 جم (سہ - صہ) =  $\frac{ط + ط + ص}{ط + ص}$   
 (۴۸) معلوم ہے کہ مس م = جب م + ط + ص اور جب م = ط + ص  
 مس م (کے - ۲) = ۲  
 (۴۹) معلوم ہے کہ جم بر = جم سہ جم صہ جم م = جم سہ جم صہ  
 مس م کے = مس م کے تو ثابت کرو کہ جب بر = (قط سہ - ۱) (قط سہ - ۱)  
 (۵۰) معلوم ہے کہ جب (ب + س - ۱) اور جب (س + ۱ - ب) اور جب (۱ + ب - س)  
 سلسلہ حسابیہ میں تو ثابت کرو کہ مس ۱ اور س ب اور س ب سلسلہ حسابیہ میں ہیں  
 (۵۱) اگر مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہو تو نصف زاویوں کے ماس التام سلسلہ  
 حسابیہ میں ہوں گے  
 (۵۲) اگر ایک مثلث زاویوں کے جوہر التام کے مربع = ۱ تو تفاوت سے بڑے اور سب سے  
 چھوٹے زاویوں کا برابر کے زاویہ کے ہوگا  
 (۵۳) اگر ۱ اور ب اور س مثلث کے زاویے ہوں اور  
 جب (۱ + س) = ن جب س تو ثابت کرو کہ مس م =  $\frac{۱ - ن}{۱ + ن}$

(۵۴) اگر ۱ اور ب اور س مثلث کے زاویے ہوں اور

$$\frac{ب}{س} = \frac{س}{ب} = \frac{س}{ب}$$

$$(۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)$$

(۵۵) اگر ۱ + ب + س = م کہ آئیں م کوئی صحیح تو

$$مس + مس + مس = مس + مس + مس$$

(۵۶) اگر س و ص و م کوئی سے زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{ج س} + \text{ج ب} + \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} = \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} \\ & \text{ج س} + \text{ج ب} + \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} = \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} \\ & \text{ج س} + \text{ج ب} + \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} = \text{ج م} - \text{ج م} - \text{ج م} \end{aligned}$$

## توان باب

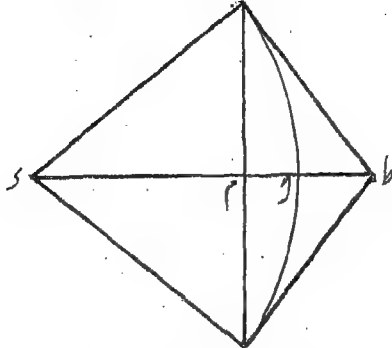
علم شتی جدولون کا بنانا

(۱۱۶) اگر برتھیا س قوس کسی کسی زاویہ کا ہو اور یہ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو بر بڑا نسبت  
اور چھوٹا نسبت مس بر کے ہوگا

فرض کرو کہ کوئی زاویہ ۱ اور ب قائمہ سے کم ہو اور ب = ۱ کے ہو ب سے ب م عمود ۱ اور ب کا  
اور اس کو س تک ایسا خارج کرو کہ م س = م ب اور ط زاویے قائمے بنانا ہو اور ب  
پر اور ۱ محدودہ سے ط پر ط بنا ہو اچھو اور س ط ملاؤ مثلثوں م س اور م ب سطح  
سے آپس میں برابر ہیں اس لئے زاویہ ط س = زاویہ ط ب اس واسطے مثلث ط س اور  
ط ب سطح سے آپس میں برابر ہیں اور ط س کا قائمہ ہے اور ط س = ط ب  
س کے مرکز اور ب کے نصف قطر پر قوس دائرہ ب اس کہچیں تو ب ط کو ب پر اور

س ط کو س بر کے کرگا  
اب اس کو علم متعارفہ کے طور پر ان لو کہ ب س چھوٹا قوس ب اس کے ہے تو ب م نصف

باب نہم ۷۹ علم مسلکی حدود و احوال کا بنانا  
 ب س کا چھوٹا ب نصف قوس ب اس سے ہوگا اس واسطے کہ ب س کے  
 نسبت ب س کے ہوگا یعنی جیب زاویہ ل و ب کی چھوٹی تقیاس قوسی ل و ب سے ہوگی



اب پھر اس بات کو معلوم متعارف سمجھ کر مان لیتے ہیں کہ قوس ب ل اس نسبت مجموعہ دو خطوط  
 خارجی ب ط اور ط س کے کم ہیں پس ب ل کم نسبت ب ط کے ہوگا اس واسطے کہ ب ل چھوٹا ب س سے  
 سے ہوا یعنی مقیاس قوسی ل و ب کا چھوٹا ر ماس ل و ب سے ہوا  
 اسے معلوم ہوا کہ اگر بر نسبت کم کے چھوٹا ہو تو جب برابر برابر س بر میں ترتیب تصاعدی  
 بلحاظ مقدار کے ہوگی

(۱۱۷) دفعہ گذشتہ میں ہم دو علوم متعارف مانے ہیں اول تو ظاہر علوم متعارف ہی معلوم ہوتا  
 اسلئے اس کے ماننے میں کچھ کلام نہیں ہے مگر دوسرا علوم متعارف نہایت مشکل ہے اسلئے  
 بالفعل طالب علم اس کے سمجھنے کا قصد کرے پہلے اس کو سمجھنے اس بات کا سمجھنا کہ شکل  
 نہیں ہے کہ اس فرض کا اثبات ایک اور فرض پر موقوف ہے اور وہ وہی فرض ہے جو  
 جو تجویزی دفعہ ۱۱۷ میں فرض کیا تھا اس واسطے کہ قوس ب ل اس کو گنتی ایک قوسوں میں  
 تقسیم کرو اور نقاط تقسیم سے ماس نکالو اب اس امر واقعی سے کہ مثلث کے دو ضلع ملکر  
 بڑے تیسرے ضلع سے ہوتے ہیں یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ یہ کثیر الاضلاع جو سطح  
 بنائی جائیگی اس کے اضلاع کا مجموعہ ب ط اور س ط کے مجموعہ سے بقدر تفاوت  
 محدود کے کم ہے اور یہ تفاوت جس قدر تعداد نقاط تقسیم کی زیادہ ہوتی ہے کم ہوتا جا

اور دفعہ ۳ کی حیثیات فرض کی تھی وہ یہاں ہی فرض کر سکتے ہیں کہ تعداد ضلع کے زیادہ کرنے سے اور مقدار ضلع کے گھٹانے سے ہم اکثر الاضلاع کے مجموعہ ضلع اور قوس ب ل اس میں جقدر فرق کم چاہیں کر سکتے ہیں پس یہ نتیجہ نکلا کہ قوس ب ل مجموعہ ضلع ب ل اور اس سے ہے

(۱۱۸) اگر بر لانیات گھٹایا جائے تو جبر کی حدود احد ہوگی اس واسطے کہ جب بر اور بر اور مس بر میں ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہے جب بر پر تقسیم کرو تو او جب بر اور جبر میں ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہے پس جب بر درمیان اور جبر کے واقع ہے اور جس وقت جعفر ہو تو جبر واحد ہوگا اسے معلوم ہوا کہ بر اگر لانیات گھٹائے تو جبر کی حدود احد کے قریب ہو چکیں اس واسطے جبر کی ہی حدود احد کے قریب ہو چکیں اور چونکہ  $\text{مس بر} = \text{جبر} \times \frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  تو اسے ثابت ہوا کہ جس وقت بر لانیات کم ہوں تو مس بر کی حد ہی واحد کے قریب ہو چکی ہے

(۱۱۹) اس بات کو بڑی احتیاط سے یاد رکھو کہ دفعہ گذشتہ کے مقدمہ عظیم بر مقیاس قوسی زاویہ کا ہر اگر کوئی اور پیمانہ واحد بجای پیمانہ واحد مقیاس قوسی کے زاویوں کے اندازہ کرنے کے واسطے مقرر کیا جائے تو حد مذکورہ احد کے قریب قریب نہیں ہو چکی شلہ فرض کرو کہ مکروحد  $\text{جبر}$  کی جب ن لانیات گھٹایا جائے دریافت کرتی ہے فرض کرو کہ بر مقیاس قوسی ن درجہ کے زاویہ کا ہے تو بر =  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  پس  $\text{جبر} = \frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  =  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  =  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  لانیات گھٹائے تو بر ہی لانیات گھٹتا ہو اور حد جبر کی واحد ہے اسے معلوم ہوا کہ  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  کی حد جب ن لانیات گھٹے  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  ہے اور یہ مقیاس قوسی ایک درجہ کا ہر اور اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  $\text{جبر}$  لانیات گھٹے تو  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  مقیاس قوسی

ایک دقیقہ کا ہے اور علیٰ ہذا القیاس

(۱۲۰) اگر نسبت زاویہ قائمہ سے کم تو ثابت کرو کہ جب بر بڑی ہو۔  $\frac{\text{جبر}}{\text{جبر}}$  سے ہوگی



علم شلتی جدیدوں کا بیانا

باب ہفتم تحقیق دریافت ہو گیا ہے کہ اس میں غلطی کم قیمت ۱۱۱ کے کچھ اور یہ قیمت  
 جم ۱۱ کی تقریباً گیا تو ۱۱۱ - ۱۱ سے جو اس کے برابر ہے دریافت ہو سکتی ہے یا دفعہ  
 ۱۱۱ کے نتائج کو کام میں لانے سے ہو سکتی ہے پس تیرہ مرتبہ کے اعشاریہ تک یہ قیمت  
 اس کی دریافت ہوگی

جم. ا. = غیر تمام ۸۲۴۸۹۹۹۹۹۹

(۱۲۳) اوپر کی دفعہ سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ بارہ مرتبہ کی اعشاریہ تک لو  
جب  $1 =$  تقیاس قوسی  $1^{\circ}$  کے اور اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  
جب  $1 =$  تقیاس قوسی  $1^{\circ}$  کے تقریباً اگر  $n$  کوئی چھوٹا عدد بتایوں کے واسطے ہو  
تو تقریباً قیمت جب  $n =$  تقیاس قوسی  $n^{\circ} = n$  گئے تقیاس قوسی  $1^{\circ} = n$  جب  $1^{\circ}$   
پس  $n =$  تقیاس قوسی  $n^{\circ}$  تقریباً یعنی جو  $n$  زاویہ نانوں کی تعداد کے برابر تقریباً  
اس طرح حاصل ہو سکتی ہے کہ تقیاس قوسی زاویہ کو ایک ثانیہ کے جب یہ تقسیم کریں  
(۱۲۴) جو زاویے اس سلسلہ حسابیہ میں واقع ہوں کہ جسکا فرق عام  $1^{\circ}$  ہو ان کو جو ب کے  
حساب کو ہم نیچے لکھتے ہیں  
فرض کرو کہ کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہی تو

جب (ن+۱) سہ + جب (ن-۱) سہ = جب ن سہ جم سہ

فرض کرو کہ  $2$  جم  $= 2$  ک تو

حب (ن) + حب (ن) = حب (ن-۱) = حب (۲-ک) حب (ن) =

اسی طرح جب (ن+۱) سہ - جیان سہ = جیان سہ - جیا (ن-۱) سہ - یک جیان سہ

یہ فرض کرو کہ  $s = 0$ ۔ آگے جب  $s$  اور  $j$   $m$  سے دو تو معلوم ہونگے اب  $n = 1$  کے رکھو

تو کہو جب ۱۰۔ جب ۱۰ کی معلوم ہوگی اور سستی قیمت ۲۰ کی معلوم ہوگی اور یہ ۱۰ =  
 کے رکھو تو جب ۱۰۔ جب ۲۰ کی معلوم ہوگی اور اسے جب ۲۰ کی معلوم ہوگی

اور پہلے ۳ کے رکھو اور علیٰ ہذا القیاس خوب جو متواتر دریافت ہوئی ہیں اونکی ک مین ضرب دینے کے اندر بڑی مشقت پڑتی ہے مگر جم ۱۰ کی قیمت سے یہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ  
 ک = ۲۳۵۰۷۰۰۰۰۰۰ اور اس ک کے چھوٹے ہونے کے سبب عمل میں

آسانی ہو جاتی ہے

(۱۲۵) جب ۵۴۵ تک کے زاویوں کی خوب کا حساب ہو جا تو باقی ربعہ کی زاویوں کا حساب اس سلسلہ سے آسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

جب (۱۰ + ۵) - جب (۱ - ۵) = ۲ جم ۵۴۵ جب ۱ = ۲۷۸ جب ۱  
 اس میں خوب جو دریافت ہو گئیں ۲۷۸ کی قیمت تقریبی میں ضرب دینی پڑیگی اور اگر جم ۹۰ تک کے زاویوں کے خوب کا حساب کریں تو باقی ربعہ کے زاویوں کا حساب آسانی تمام اس سلسلہ سے ہو جائیگا کہ

جب (۱۰ + ۹) - جب (۱ - ۹) = ۲ جم ۹۰ جب ۱ = جب ۱  
 (۱۲۶) جب خوب ربعہ اول کے زاویوں کی معلوم ہو گئیں تو اس سب سے کہ جب تمام ایک زاویہ کی اپنی تمام کے جب کے برابر ہوتی ہے خوب تمام تمام زاویوں کے ربعہ اول میں معلوم ہو جائیگی اور خوب پر خوب تمام کے تقسیم کرنے سے ماس معلوم ہوگی اور جب ماس ۵۴۵ سے کم زاویوں کے معلوم ہوں تو اون کے ۵۴۵ سے بڑے زاویوں کے ماس اس سلسلہ کی استعانت سے آسانی معلوم ہوتے ہیں کہ

$$\text{مس (۱۰ + ۵) = مس (۱ - ۵) - ۲ مس ۱}$$

اور اسلئے مس (۱۰ + ۵) = مس (۱ - ۵) + ۲ مس ۱  
 اور چونکہ ماس تمام اپنی تمامی کا ماس ہوتا، اس واسطے ماس تمام ہی زاویوں کے معلوم ہو جائیگا اور خوب کے متکافی معلوم کرنے سے قاطع تمام کا حساب بھی لگ جائیگا اور وہ ماسوں کے جدولوں سے اس سلسلہ کی استعانت سے آسانی معلوم ہوتے ہیں کہ



قسم ۱ =  $\frac{1}{2}$  (سن  $\frac{1}{2}$  + مم  $\frac{1}{2}$ )  
 اور قاطع التمام جب معلوم ہوگی تو اول سر قاطع الزاویہ ہی معلوم ہو سکتے ہیں کیونکہ قاطع الزاویہ  
 قاطع التمام تسامی زاویہ کا ہوتا ہے

(۱۲۷) زاویوں کی جوب کے واسطے جو طریقہ حساب کا اختیار کیا گیا ہے اور سین اول جب  
 ۱۰ کی بارہ مرتبہ کی اعشاریہ تک دریافت کی گئی تھی اور اس سے متواتر جب ۲۰ اور جب ۳۰  
 وغیرہ معلوم کی تھی اسے نتیجہ نہیں نکلتا کہ سب زاویوں کی جوب کی قیمتیں بارہ مرتبہ کی  
 اعشاریہ تک صحیح ہی ہوں اسلئے یہ بات جبری فائدہ مند ہی کہ نتائج مستحکمہ کا امتحان کریں کہ  
 وہ کس درجہ اور مرتبہ تک صحیح ہیں اور یہ بھی ضروری بات ہے کہ جو اعمال ان علم تعلق نسبتوں کے  
 دریافت کرنے واسطے کریں ان کی صحت کی بھی جانچ پڑتال کریں اس مطلب کے واسطے ہم کو یہ کرنا  
 چاہئے کہ جب ہم جب کسی زاویہ کی اس طریقہ کے موافق نکال چکیں تو اس جیب کو ایک  
 اور طریقہ سے جو پہلے طریقہ سے کچھ تعلق نہ رکھتا ہو نکالیں اور دونوں جیبوں کا آپس میں مقابلہ کرنے  
 سے عمل کی صحت کا امتحان کریں مثلاً ہم کو معلوم ہے کہ جب  $۱۸^\circ = \frac{57}{100}$  اب اس کا  
 حساب تقریبی جہاں تک چاہیں کریں اور پھر اس کو جدول سے مقابلہ کریں اور اس مقابلہ  
 کرنے سے ہم کو معلوم ہو جائیگا کہ کہاں تک ان جدولوں پر اعتبار ہو سکتا ہے اور صورتاً نوٹ  
 ایسی ہیں کہ ان کے جدول کی صحت کا امتحان ہو جاتا ہے اور یہ واسطے ان کا نام صورت  
 اثباتیہ ہے اور وہ یہ ہیں کہ

$$\begin{aligned} \text{جب } ۱^\circ + ۲^\circ = ۱ - ۲^\circ & \text{ جب } ۱^\circ - ۲^\circ = ۱ + ۲^\circ \text{ جب } ۱^\circ + ۳^\circ = ۱ - ۳^\circ \\ \text{جب } ۱^\circ - ۳^\circ = ۱ + ۳^\circ & \text{ جب } ۱^\circ + ۴^\circ = ۱ - ۴^\circ \text{ جب } ۱^\circ - ۴^\circ = ۱ + ۴^\circ \end{aligned}$$

اور یہ آسانی سے اس طرح ثابت ہو سکتی ہیں کہ

$$\begin{aligned} \text{جب } ۱^\circ + ۲^\circ = ۱ - ۲^\circ & \text{ جب } ۲^\circ + ۲^\circ = ۱ - ۲^\circ \text{ جب } ۱^\circ - ۲^\circ = ۱ + ۲^\circ \\ \text{جب } ۱^\circ + ۳^\circ = ۱ - ۳^\circ & \text{ جب } ۳^\circ + ۳^\circ = ۱ - ۳^\circ \text{ جب } ۱^\circ - ۳^\circ = ۱ + ۳^\circ \end{aligned}$$



حد اقصى  $\frac{1}{2}$  واحد ہے اس نتیجہ کو بھی یوں کا قانون ہی کہتے ہیں

(۱۳۰) اگر کسی نسبت زاویہ جو قائم سے چھوٹا ہو مقیاس قوسی لایم تو ثابت کرو کہ جب لاٹرا  
لا -  $\frac{1}{4}$  سے ہوگا

موجب دفعہ ۱۲۱ کے جم لاٹرا ۱ -  $\frac{1}{4}$  سے ہے  
اسی واسطے جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  بڑا بہ نسبت (۱ -  $\frac{1}{4}$ ) (۱ -  $\frac{1}{4}$ ) سے ہے  
اور بدرجہ اولے بڑا ۱ - ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ) سے ہے  
اسی واسطے جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  بڑا بہ نسبت (۱ - ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ )) (۱ -  $\frac{1}{4}$ ) سے ہے  
اور بدرجہ اولے بڑا ۱ - ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ) سے ہے  
اسی طرح عمل کرنے سے ہم کو دریافت ہوتا ہے کہ  
جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  بڑا بہ نسبت  
۱ - ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ) سے ہے  
یعنی بڑا بہ نسبت ۱ -  $\frac{1}{4}$  سے ہے  
یعنی بڑا بہ نسبت ۱ - ( $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 3$ ) سے ہے  
اور بدرجہ اولی بڑا ۱ -  $\frac{1}{4}$  سے ہے  
اسلئے بموجب دفعہ ۱۲۹ کے

حاصلہ بڑا ۱ -  $\frac{1}{4}$  سے ہے  
اسی واسطے جب لاٹرا لا -  $\frac{1}{4}$  سے ہے  
دفعہ ۱۲۱ کی طرح عمل کرنے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  
جم لاٹرا (۱ -  $\frac{1}{4}$  +  $\frac{1}{4}$ ) سے ہے اس کی علم شلٹ کی کتاب دیکھو

اسماء

(۱) ایک نصف دائرہ کا قطر  $AB$  ہو اور  $S$  اس کا مرکز ہے اور  $SM$  میں  $E$  ایک نقطہ ہو  $EM$  عمود  $AB$  پر نکالو اور  $E$  اور  $B$  کا کچھ اس طرح عمل شکل سے زاویہ  $BEM$  اور  $EAM$  میں سے ہر ایک نصف زاویہ  $E$  سے  $B$  سے ہر لیں یہ صورت قانونی مستند کرے

$$(۲) \text{ اگر } \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ تو } \frac{1}{x} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = x$$

(۲) اگر مس بر = مس ہر + تو حم ہر + جب ہر =

(۷) اگر قط ۲ بر ۲ ط بر قم بر تو قم بر = مم بر - ط بر

(۵) اگر مسر = مس ضر تو ثابت کرد که مس (بر-ضر) زیادہ (ن-ا) مس ضر

(۶) جب بر + جب ہر - جم رجب (بر + ہر) کی تحویل ایک رقم کی طرف کرے

(۷) نیات کرو

$$= \frac{\text{جسم صلب} \frac{1}{2} (\text{س} - \text{ص})}{\text{جسم صلب} \frac{1}{2} (\text{س} + \text{ص})} + \frac{\text{جسم صلب} (\text{س} + \text{ص})}{\text{س} - \text{ص}}$$

(۸) جو شے کہ ایک میل کے فاصلہ پر زون فیزی آئٹم پر ایک دقیقہ کا بناؤ اور اسکا ارتقاع غیر آگاہ

(۹) چیم ایچ قطر کا ملحق ہو رہے اور سکو کتنی فاصلہ پر آئنگے سے کہیں کہ جائزہ نظر سے چھپ چکا ہے

اور یہ مان لو کہ طائر قطر جانید کا نصف درجہ ہے

(۱۰) اگر جب  $30 = \angle B$  کے درست ہو گا وہاں کی کچھ سی قیمت سوا صف اور دو قاتون

اور اضواء دو قلموں کے ہوتو ثبات کرو کہ ن در میان ۲ اور - اسکے واقع ہوگا

اور اس مساوات کو  $n = 2$  کے مان کر حل کرو

(۱۱) اگر مس = ۱ - اجزای مس  
ن حبس = ۳ جمسه تو ثبات کو کہ مس (سه - سه) = (۱ - ن) مس

(۱۲) اگر جب یہ معلوم ہو تو منس کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو

(۱۳) ثابت کرو کہ  $(\text{جم} ۱ + \text{جبا} ۱) = \text{جم} ۸ + ۱۸ + ۲۸ \text{ جم} ۲۵ + ۳۵$  یون

(۱۴) براور ہر کی اون قیمتوں کو دریافت کرو جسے کہ شرائط مساوات جم بر جم  $۱ + ۱ = ۰$  کے

(۱۵) اگر  $\text{جبا} (\text{سہ} + \text{سہ}) = \text{جبا} \text{سہ} + \text{جبا} \text{سہ} - \text{جبا} \text{جبا} \text{سہ} (\text{سہ} + \text{سہ})$

ثابت کرو کہ  $\text{مس} \text{سہ} = \frac{1 \pm \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \text{مس} \text{سہ}$

(۱۶) حدا قصی  $\text{جم} ۲۲$  بر  $\text{جم} ۲$  بر  $\text{جم} ۲$  بر  $\text{جم} ۲$  بر کی اوس صورتیں دریافت کرو کہ بر لا نہایت کم ہوں  
ان مساواتوں کو حل کرو

(۱۷)  $\text{جبا} \text{بر} + \text{جم} \text{بر} = \text{جم} ۲$

(۱۸)  $\text{جبا} \text{بر} - \text{جم} \text{بر} = \text{جم} ۲$

(۱۹)  $\text{جبا} ۲ \text{بر} = \text{جم} \text{بر}$

(۲۰)  $(\text{جم} ۲ - \text{جبا} ۲) = \text{جم} ۲ = (\text{جبا} \text{بر} + \text{جم} \text{بر})$

(۲۱)  $\text{جم} \text{بر} - \text{جم} ۲ \text{بر} = \text{جبا} ۲ \text{بر}$

(۲۲)  $\text{جم} \text{بر} - \text{مس} \text{بر} = \text{جم} \text{بر} + \text{جبا} \text{بر}$

(۲۳)  $\text{جبا} ۲ \text{بر} + \text{جبا} ۲ \text{بر} = ۲$

(۲۴)  $\text{مس} \text{بر} + ۲ \text{جم} \text{بر} = \text{جبا} \text{بر} (۱ + \text{مس} \text{بر} \text{مس} \text{بر})$

(۲۵)  $\text{جبا} ۲ \text{بر} - \text{جبا} ۲ \text{بر} = \text{جبا} \text{کچھ}$

(۲۶)  $\text{قم} \text{بر} = \text{قم} \text{کچھ}$

(۲۷)  $\text{جم} \text{بر} \text{جم} ۲ \text{بر} = \text{جم} ۵ \text{بر} \text{جم} ۷ \text{بر}$

(۲۸)  $\text{جبا} \text{بر} \text{جبا} ۳ \text{بر} = \frac{1}{4}$

(۲۹)  $\text{جبا} ۲ \text{بر} + \text{جبا} ۲ \text{بر} = ۳$

(۳۰)  $(۱ - \text{مس} \text{بر}) (۱ + \text{جبا} ۲ \text{بر}) = ۱ + \text{مس} \text{بر}$

(۳۱)  $\text{جبا} \text{بر} + \text{جبا} ۲ \text{بر} + \text{جبا} ۳ \text{بر} + \text{جبا} ۴ \text{بر} =$

- (۳۲) جب بر - جم بر = ۴ جب بر جم بر  
 (۳۳) (جم بر - مس بر) = (۳۸ - ۱) = ۳۷  
 (۳۴) ۳۸۲ جم (کے - بر) (۱ + جب بر) = ۱ + جم بر  
 (۳۵) جب ۹ بر + جب ۵ بر + ۲ صا بر = ۱

## باب دہم

لوکارشم

(۱۳۱) لوکارشم کی ذات صفات سے واقف ہونا اور اس کے حساب کے طریقوں کو جاننا ہی طالب علم کو ضرور ہے اسلئے اس علم کے ہر سالہ میں ان مضامین سے متعلق ہی ایک باب ہوتا ہے

(۱۳۲) فرض کرو کہ  $۱ = ۱$  تو لہذا لوکارشم کے موافق اساس  $۱$  کی کہتے ہیں پس لوکارشم کسی عدد کے موافق اساس معلوم کی وہ قوت نہا ہو کہ جس کے موافق اساس قوت میں آئے ہوں

برابر اس عدد کے ہو جائے

لوکارشم کے موافق اساس  $۱$  کی سطح لکھی جاتی ہے کہ لوکارشم  $۱$  پس لوکارشم  $۱ = ۱$  وہی ربط معلوم ہوتا ہے جو  $۱ = ۱$  سے سمجھا جاتا ہے

(۱۳۳) مثلاً  $۱۸ = ۱۸$  پس  $۸$  لوکارشم  $۸$  کی موافق اساس  $۳$  کے ہے

اگر اعداد  $۲$  و  $۳$  ... وغیرہ کی لوکارشم موافق اساس معلوم کے مثلاً  $۱$  کے دریافت کرنی تو ان مساواتوں کو کہ  $۱ = ۱$  اور  $۱ = ۱$  اور  $۲ = ۱$  ... متواتر حل کریں

اب ہم دوسرے باب میں ذکر کریں گے کہ یہ حل تقریبی ہونگے یعنی گو قیمت  $۱$  کی ایسی نہیں دریا کر سکتے کہ  $۱ = ۱$  کی تحقیق ہو لیکن قیمت  $۱$  کی ایسی دریافت کر سکتی ہیں کہ  $۱ = ۱$  اور  $۲$  میں فرق جتنا چاہیں کم رہے غرض تقریبی قیمت  $۱$  کی معلوم ہو سکتی ہے تحقیقی قیمت نہیں معلوم ہوگی

لوکارثم

اب ہم چند خواص لوکارثم کے ثابت کرتے ہیں  
(۱۳۴) خواہ اساس کچھ بھی لوکارثم کی صفر ہوتی ہے  
اس واسطے کہ  $1 = 1$  جب  $1 = 0$

۵۱ لوکارثم اساس کی ایک ہوتی ہے

اس واسطے کہ  $1 = 1$  جب  $1 = 1$

(۱۳۶) لوکارثم حاصل ضرب کی برابر ہوتی ہے اور اس کے اجزاء ضربی کے لوکارثوں کے مجموعہ کے

اس واسطے کہ فرض کرو  $1 = 1$  اور  $5 = 5$  لوک  $1$

اس واسطے  $م = 1$  اور  $ن = 5$

اس واسطے  $م = 1$  اور  $ن = 5$

اس واسطے لوک  $م = 1$  اور  $ن = 5$  لوک  $م + ن$

(۱۳۷) لوکارثم خارج قسمت کے برابر ہوتی ہے اور اس حاصل تفریق کے جو مقسوم کی لوکارثم

میں مقسوم علیہ کی لوکارثم گہٹانے سے حاصل ہو

اس واسطے کہ فرض کرو  $1 = 1$  اور  $5 = 5$  لوک  $ن$

اس واسطے  $م = 1$  اور  $ن = 5$

اس واسطے  $م = 1$  اور  $ن = 5$

اس واسطے لوک  $م = 1$  اور  $ن = 5$  لوک  $م - ن$

(۱۳۸) لوکارثم کسی عدد کی قوت کا خواہ صحیح ہو خواہ کسر برابر ہوتا ہو اور اس عدد کے لوکارثم اور

قوت نما کے حاصل ضرب کے

اس واسطے کہ فرض کرو  $م = 1$  اور  $ن = 5$  لوک  $م = 1$  اور  $ن = 5$

اس واسطے لوک  $م = 1$  اور  $ن = 5$  لوک  $م = 1$  اور  $ن = 5$

(۱۳۹) ایک ہی عدد کے مختلف الاسس لوکارثوں میں جو ارتباط ہو اس سے دریا

فرض کرو کہ لا = لوک و م اور ۹ = لوک ب م

اس واسطے م = ۱ اور ب = ۱

اس واسطے ۱ = ۱

اس واسطے ۱ = ب اور ب = ۱

اس واسطے ۱ = لوک و ب اور ۱ = لوک ب

اسے معلوم ہوا کہ لا لوک ب اور ۱ = لوک ب

پس یہ ثابت ہوا کہ لوکارثم ایک عدد کے موافق اساس ب کی سطح معلوم ہو سکتی ہے کہ اس عدد کے لوکارثم موافق اساس ۱ کے لیکر لوک ب ۱ میں یا لوک ب میں ضرب دین

اور یہ بھی معلوم ہے کہ لوک ب ۱ = لوک و ب = ۱

(۱۲۰) علمی حسابوں میں صرف اساس ۱۰ اکام آتی ہے اور جو لوکارثمیں موافق اساس ۱۰ کے پائی جاتی ہیں ان کو لوکارثم مروج کہتے ہیں ان کے کی دو دفعات میں ہم بتلائیے کہ انکی اساس مقرر کر نہیں کیا فائدہ ہے ان تعریفات کی آگے ضرورت پڑیگی کہ لوکارثم کے صحیح حصہ کو عدد بیانی لوکارثم کا کہتے ہیں اور جو اعشاریہ لوکارثم میں ہوتی ہے اس کو اعشاریہ لوکارثم کہتے ہیں

(۱۲۱) لوکارثم مروج میں اگر کسی عدد کی لوکارثم معلوم ہو تو ہم فوراً لوکارثم اس عدد

اور انکی کسی قوت کے حاصل ضرب کی دریافت کر سکتے ہیں

اس واسطے کہ لوک ۱۰ = ۹ × ۱ = لوک ب ۱ + ۱ = لوک ۱ + ۱ = ۲

لوک ۱۰ = ۱۰ × ۱ = لوک ب ۱ + ۱ = لوک ۱ + ۱ = ۲

یعنی ہم لوکارثم کسی عدد کی جانتے ہوں تو ہم اسی لوکارثم اس عدد کی دریافت کر سکتے ہیں جس میں ہندسے تو وہی ہوں جو پہلے عدد میں تھے اور علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہو

(۱۲۲) لوکارثم مروج میں لوکارثم کا عدد بیانی فقط دیکھنے سے تحقیق ہو جاتا ہے



اسکی یہ ہے کہ فرض کرو عدد بڑا ایک ہے ہو اور ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہو لو اور  
لوکارشم کے بڑی اور ۱ سے چھوٹی ہوگی اس واسطے عدد بیانی لوکارشم کان ہوگا  
دوم فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہو اور درمیان ۱ اور ۱ کے واقع ہو یعنی  
۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہو تو اسکی لوکارشم بعض منفی مقدار درمیان - ۱ اور  
- (۱ + ۱) کے واقع ہوگی اگر ہم اس بات پر اتفاق کر لیں کہ اعشاریہ لوکارشی ہمیشہ مثبت  
ہو کر کے تو عدد بیانی لوکارشم کا - (۱ + ۱) ہوگا

(۱۸۳) لہذا کو ایک سلسلہ میں پہلا و جسمین لاکھ تو تین بتدریج بڑھتی جائیں یعنی ایک عدد کو  
اسکی لوکارشم کے قوائے تصاعیدی میں موافق اساس معلوم پہلا

$$1 = [1 + (1-1)] = 1 + (1-1) + \frac{(1-1)(1-1)}{2 \times 1} + \frac{(1-1)(1-1)(1-1)}{3 \times 2 \times 1} + \dots$$

+ ارقام جسمین لا اور لا وغیرہ شامل ہوں  
اسے ثابت ہوتا ہے کہ لا ایک سلسلہ میں پہلیتا ہو کہ اسکا آغاز آ سے ہوتا ہے اور  
بتدریج قوائے بڑھتے جاتے ہیں اس واسطے ہم فرض کر سکتے ہیں

$$1 = 1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

اس میں ج و ج و ج نہ... میں وہ مقادیر ہیں جو لایر موقوف نہیں ہیں اس واسطے

$$1 = 1 - (1-1) + (1-1) - (1-1) + \dots$$

اور ج اور ج نہ ہوں تا معلوم میں اب انکی قیمت دریافت کرتے ہیں لا کو لا و

بدل دو

$$1 + ج (لا + ی) + ج (لا + ی) + ج (لا + ی) + \dots$$

لیکن  $1 = 1$  اور  $1 = 1$  [  $1 + ج (لا + ی) + ج (لا + ی) + ج (لا + ی) + \dots$  ]  
چونکہ  $1 = 1$  کے دو صورتیں مفصل مساوات تطابق میں تو ہم لا کے سروں کو دو فوجوں میں  
آپس میں برابر فرض کر سکتے ہیں

$$ج = ج + ج + ج + ج + ج + \dots$$

پس  $ج = [1 + ج + ج + ج + ج + \dots]$   
اس مساوات تطابق میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  $1$  کے متشابه قراء کے آپس میں برابر ہیں

$$\begin{aligned} ج &= ج + ج + ج + ج + ج + \dots \\ ج &= ج + ج + ج + ج + ج + \dots \\ ج &= ج + ج + ج + ج + ج + \dots \\ ج &= ج + ج + ج + ج + ج + \dots \end{aligned}$$

$$پس 1 = 1 + ج + ج + ج + ج + ج + \dots$$

چونکہ یہ نتیجہ سب قیوتوں کے واسطے صحیح ہر تولد کو ایسا فرض کرو کہ  $1 = 1$  اور  $1 = 1$  اور

$$1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

اس سلسلہ کو اکثری سے تعبیر کرتے ہیں پس  $1 = 1$  اور  $1 = 1$  اور

$$ج = 1 = 1 + ج + ج + ج + ج + ج + \dots$$

اسکو ضابطہ قوت نمائی کہتے ہیں  
ی کو  $1$  کی جگہ لکھو تو لوگ  $1$  کی لوگ  $1$  کی جگہ لکھو یعنی موجب دفعہ  $3$  کے ایک ہوجاگی

$$پس 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

باب دوم  
 یہ ایک نتیجہ اعظم ہے اور لاکسی ساری قضیوں کو واسطے درست ہر اور طالب علم کو اتنی واقفیت اس نتیجے کے  
 ضرور ہونی چاہئے کہ جہاں اس کی خاص صورتوں میں ضرورت پڑے تو وہ اس کو کام میں لاسکے  
 مثلاً فرض کرو کہ  $a = 1$  - ا تو

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots$$

یا ہم لاکسی جگہ کوئی اور نمبر مقرر کر سکتے ہیں مثلاً  $n$  ط بجای لاکے کہیں تو

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \dots$$

اور جو تحقیقات لکھی ہیں اس کی ایک بڑی نسبت جبر متقابل کے اشال غیر البعین کے باب میں دیکھیں  
 (۱۲۴) جس سلسلہ کو برابری کے فرض کیا ہو اس کا حساب اگر درحقیقت لگائیں تو وہ تقریباً برابر  
 وغیرہ ۱۸۲۸، ۱۸۲۸، ۱۸۲۸ کے ہوگا

(۱۲۵) لوگ  $(1 + \frac{1}{n})$  کی سیر سلسلہ میں دریافت کرو کہ اس میں خواہ لاکسی تبدیلیج بڑھتی  
 دفعہ ۵۲۲ میں ہم نے بیان کیا ہے کہ  $\log 2 = 0.69314718055994530941723212145817666$  یعنی جو جب اسی دفعہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots = \log 2$$

لاکسی جگہ  $1 + \frac{1}{n}$  لاکہ تو اتنے معلوم ہوتا ہے کہ

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \dots = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

اگر لاکر جب ہو تو لوگ  $(1 + \frac{1}{n})$  کا حساب اس سلسلہ سے ہو سکتا ہے لیکن اگر لاکر بہت چھوٹا ہو  
 تو ارقام سلسلہ ایسی بہت کم ہو گئیں کہ بہت سے تعدد ارقام کی رکھنی پڑے گی جیسا لگایا  
 اور اگر لاکر ایک سے بڑھتا ہو سلسلہ بالکل ہمارے مطالب کے لئے غیر مناسب ہوگا اور اسے چھ

کام نہیں لگایا اس سلسلے ایک اور قانون جسے آسانی مطلب نکلے استنباط کرتے ہیں

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots = \log 2$$

اس سلسلے لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ  
 تفریق کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ لوگ  $(1 - \frac{1}{n})$  لاکے کہ

لوگ ی  $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$  اس سلسلہ میں  $\frac{1}{100}$  کو لاکھ بجایا جائے گا

بیس لوگ ی  $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$  (۱)

ابن = اے کہہ تو لوگ ی  $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$  (۲)

اب پر (۱) میں  $n = m + 1$  کے کہہ تو اسے قیمت لوگ ی  $\frac{1}{n}$  کی دریافت ہوگی اس طرح

لوگ ی  $(n+1) -$  لوگ ی  $n = 2$  (۳)

(۱۷۷) دفعہ گذشتہ کے سلسلہ (۲) سے لوکار نم کی ہم دریافت کر سکتے ہیں  $m = 2$  کے کہہ اور حساب کرو تو لوگ ی  $2 =$  وغیرہ ۱۸ ۷۷ ۳۱ ۶۹ ۵

اگر دو متصل اعداد میں ایک عدد کی لوکار نم معلوم ہو تو اسے دوسرے عدد کی لوکار نم معلوم ہو سکتی ہے

$n = 2$  کے کہہ تو لوگ ی  $2$  کی قیمت معلوم ہونے سے ہر کو یہ حاصل ہوگا

لوگ ی  $3 =$  وغیرہ ۱۲ ۲۹ ۸۶ ۹۵ ۱۵

$n = 9$  کے سلسلہ (۳) میں کہہ تو لوگ ی  $n =$  لوگ ی  $4 =$  لوگ ی  $3 = 2$  لوگ ی  $2$

بیس سے لوکار نم ۹ کی معلوم ہوگی اور جب ۹ کی لوکار نم معلوم ہوگی تو اسے ۱۰ کی لوکار نم معلوم ہوگی کہ

لوگ ی  $10 =$  وغیرہ ۲۵ ۳۰ ۵۰ ۸۵ ۲۵

(۱۷۸) لوکار نم جو موافق اساس ی کی لیا جاتی ہو اور کسی نیزی لوکار نم کہتے ہیں اس کو لوکار نم کہتے ہیں

یہ صاحب نے ایجاد کیا تھا اور اس کو لوکار نم طبعی بھی کہتے ہیں کیونکہ جہاں تحقیقات لوکار نم حسابوں کی ہوتی ہے وہاں ہی لوکار نم کا کام میں آتی ہے اس اساس کے موافق جو لوکار نم مرتب ہوتی ہیں وہ عملیات میں اور نیزی لوکار نم میں نظریات میں بہت کچھ آ رہے ہیں

(۱۷۹) دفعہ ۱۳۹ میں بیان ہوا کہ لوکار نم موافق اساس ۱۰ کے کسی عدد کی نیزی لوکار نم کو لوگ ی ۱۰ یعنی ۲۵ ۳۰ ۵۰ ۸۵ ۲۵ سے ۱۷۸ ۲۹ ۳۰ ۵۰ ۲۵ ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے اس عدد کو مضروب معین یا قالب لوکار نم مروج کا کہتے ہیں

لوکار نم

باب نم ۱۴۶ کے سلسلے میں مرتب ہو سکتے ہیں لہذا ان کے لوکار نم مروجہ ہی دریافت ہو جائیں گے

مثلاً بالکل سلسلہ (۳) کو مضروب معین میں جس کو ہم لب کے تغیر کرتے ہیں ضرب دیدو تو

$$\text{لب لوگ ی} (ن+۱) - \text{لب لوگ ی} ن = \text{لب} \left[ \frac{۱}{ن+۱} + \frac{۳}{(ن+۱)(ن+۲)} + \frac{۵}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + \dots \right]$$

$$\text{یعنی لوگ ی} (ن+۱) - \text{لوگ ی} ن = \text{لب} \left[ \frac{۱}{ن+۱} + \frac{۳}{(ن+۱)(ن+۲)} + \frac{۵}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + \dots \right]$$

(۱۴۹) مقداری کی متبائن ہوتی ہے

اس واسطے کہ اگر متبائن نہ ہو تو بشرط امکان فرض کر دی = مچ سمین م اور صحیح اعداد میں یہ

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

طرفین مساوات کو ۲ میں ضرب دو تو

$$۱ - ۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

$$\text{لیکن } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

ایک کسر اسلئے کہ وہ  $\frac{۱}{۲}$  سے بڑی ہے اور اس سلسلہ ہندسی کی جویں

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

یعنی کم بہ نسبت  $\frac{۱}{۲}$  کے ہے

پس حاصل تفریق دو صحیح عددوں کا برابر ایک کسر ہوا اور یہ باطل ہے اس واسطے کی متبائن

(۱۵۰) اب ہم دوحدا حق کے باب میں تحقیقات کر کے اس باب کو ختم کرتے ہیں یہ تحقیقات

آئندہ بڑی پکار آمد ہے جبکہ لاناہایت زیادہ وحدا حق (جم سچ) کی دریافت کرو

$$\text{فرض کرو کہ یو} = (\text{جم سچ}) = (۱ - \text{جب سچ}) \text{ تو}$$

$$\text{لوگ ی} = \text{لوگ} (۱ - \text{جب سچ}) = \text{لوگ} (۱ - \text{جب سچ})$$

$$= - \left( \text{جب سچ} + \frac{۱}{۲} \text{ جب سچ} + \frac{۱}{۳} \text{ جب سچ} + \dots \right)$$

جس وقت کہ لاناہایت زیادہ ہو بوجہ دفعہ ۱۱۸ کے

$$ن \text{ جب سچ} = \text{سہ} \frac{\text{جب سچ}}{\text{سہ}} = \text{سہ}$$

اسی واسطے آخر کو  $\text{ج} = \text{ج} = \text{سہ ج} = \text{ج}$  اور اسی ہی  
ن ج  $\text{ج} = \text{ون ج} = \text{ج}$  . . . آخر کو فنا ہو جائیگی اسی واسطے لوک  $\text{و} =$

اسی واسطے  $\text{و} = ۱$  پس مطلوب حد اقصی واحد ہے

جبکہ  $\text{ن}$  لانا نہایت زیادہ ہو  $(\text{ج} = \text{ج})$  کی حد اقصی دریافت کرو

بحسب دفعہ ۱۱۶ کے  $\text{ج} = \text{ج}$  چھوٹا نسبت  $\text{ا}$  کے اور بڑا نسبت

$\text{ج} = \text{ج}$  کے یعنی بڑا نسبت  $\text{جم} = \text{ج}$  کے ہے اسے معلوم ہوا کہ  $(\text{ج} = \text{ج})$

چھوٹا نسبت  $\text{ا}$  یعنی  $\text{ا}$  کے اور بڑا نسبت  $(\text{جم} = \text{ج})$  کے اور بحسب دفعہ گذشتہ کے

حد اقصی  $(\text{جم} = \text{ج})$  کی واحد ہی اسی واسطے حد  $(\text{ج} = \text{ج})$  حد اقصی واحد ہے

امثلہ متفرقہ

(۱) موافق اساس  $\text{ا} = \text{ا}$  کے لوکار نم  $۱۲۸$  کی دریافت کرو

(۲) موافق اساس  $\text{ا} = \text{ا}$  کے لوکار نم  $۲۲۳۳۹۶$  کی دریافت کرو

(۳) لوک  $۲۱۸۷$  اور لوک  $۱۰۰۰۱$  اور لوک  $\text{جم} = ۵$  کی دریافت کرو

(۴) اس مساوات  $۵ = ۴۲ = ۳ + ۳$  سے قیمت  $۱۱$  کی تقریباً دریافت کرو

اور معلوم ہے کہ لوک  $۲ = ۳۰۱۰۳۰$

(۵) معلوم ہے کہ لوک  $۲۲۲ = ۵۲$  اور لوک  $۱۲۵ = ۱۲$  اور لوک  $۷$  کی دریافت کرو

(۶) عدد بیانی لوک  $۲۵۰$  اور لوک  $۲۵۰ = ۷۰$  کا دریافت کرو

(۷) معلوم ہے کہ لوک  $۲ = ۳۰۱۰۳۰$  اور لوک  $۲۷۰ = ۷۰$  اور لوکار نم  $۳۰۰۳$

دریافت کرو

(۸) معلوم ہے کہ لوک  $۲ = ۳۰۱۰۳۰$  اور لوک  $۷ = ۸۲۵۰۹۸$  اور لوک  $۹۸$

اور لوک  $(\text{جم} = \text{ج})$  کو دریافت کرو

(۹) معلوم ہے کہ لوک  $۲ = ۳۰۱۰۳۰$  اور لوک  $۳ = ۱۲ = ۱۲$  اور لوک  $(۲۰۰۲۰۷۳۶)$

دریافت کرو

(۱۰) اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \dots \text{لا نہایت}$$

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots \text{لا نہایت}$$

لا کو ان چیز مساواتوں سے دریافت کرو

$$(۱۲) ۴ \text{ جب لا جب } (لا - ۳) = ۲ \text{ جم } ۳ - ۱$$

$$(۱۳) \text{ جم } ۵ = (۵ - ۴) + ۱ \text{ جب } ۳ = \text{لا جب } ۵$$

$$(۱۴) \text{ جب } ۳ + \text{جب } (لا - ۳) + \text{جب } (۲ + لا - ۳) = \text{جب } (لا + ۳) + \text{جب } (لا - ۳)$$

$$(۱۵) \text{ جم } (لا + \frac{3}{4}) = ۳ + \text{جم } (لا + \frac{1}{4}) = ۳ = \text{جب } ۳$$

$$(۱۶) \text{ لا جم } ۳ \text{ جم } (۳ - \frac{1}{4}) + \text{لا جم } (۳ - \frac{1}{4}) = ۲ \text{ جم } \frac{3}{4}$$

$$(۱۷) \text{ جم } لا - ۳ = \text{جم } لا = ۳ \text{ جم } ۳$$

$$(۱۸) \text{ اس مساوات م جم بر } = \text{ن جم } (۳ - ۲) \text{ کو حل کرو}$$

$$(۱۹) \text{ اس مساوات جم ن بر } + \text{جم } (ن - ۲) \text{ بر } = \text{جم بر کو حل کرو}$$

(۲۰) اس مساوات کو حل کرو اور ثابت کرو کہ سات قیمتیں بر کی بڑی سے

اور چھوٹی ۲ کے سے ہیں جب بر + جب ۳ بر = جب ۲ بر + جب ۴ بر

(۲۱) مساوات مس لا = مس ص ۳ (۳ + لا) میں مس لا کو دریافت کرو اور

ثابت کرو کہ مس لا کے اعلیٰ ہونیکے واسطے ضروری ہے کہ مس ص در میان (قطرہ مس ۳)

اور (قطرہ + مس ۳) کے نہ واقع ہو

(۲۲) کم از کم قیمت بر کی دریافت کرو جسے شرائط اس مساوات کی پوری ہوں

$$\text{مس } (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + \text{مس } (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} (\frac{3}{4} + 1)$$

(۲۳) معلوم ہے کہ جب (ن + ۱) بر = جب ن بر + جب (ن - ۱) بر

(ن+۱) براورن براور (ن-۱) بر مثلث کے زاویے میں تو ن کی صحیح قیمت دیا

(۲۲) اس مساوات کا اختصار کرو اور اسکا حل ہی کرو

جم بر - جم سہ = ۲ جم بر (جم بر - جم سہ) - ۲ جب بر (جب بر - جب سہ)

(۲۵) ثابت کرو کہ سب زاویے جنکی جب وہی ہو جو سہ کی ہے اس صورت

(۲۲+۱) کہ  $\pm$  (کے - سہ) میں داخل ہیں

(۲۶) ثابت کرو کہ تمام زاویے جنکی وہی جب التام ہو جو سہ کی ہے اس صورت

(ن+۱) کہ  $\pm$  (۱-ا) (سہ - کے) میں داخل ہیں

(۲۷) جم  $\frac{1}{2}$  - جب  $\frac{1}{2}$  =  $\pm$  (۱-ا) (جب ۱) میں بجای علامت مشتبہ کے

(۱-ا) کے رکھ سکتے ہیں اسمین م سب کے بڑا وہ صحیح عدد ہو جو  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  میں داخل ہے

اور درجن میں بیان کیا گیا ہے

(۲۸) مس  $\frac{1}{2}$  =  $\pm$  (۱+س) (۱-ا) میں بجای علامت مشتبہ کے (۱-ا)

مندرج ہو سکتی اسمین م وہ سب کے بڑا صحیح عدد ہے جو  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  میں داخل ہے اور درجن

میں بیان کیا گیا ہے

(۲۹) اگر مس (حم ل) = جم (مس ل) تو ثابت کرو کہ اصل قیمتیں ل کی جب ۲ =  $\frac{1}{2}$  (۱+۱) کہ

سے معلوم ہو سکتی ہیں اور اسمین ل ہر ایک صحیح عدد سواء ۱ کے ہو سکتا ہے

(۳۰) جم ل کی رقموں میں جم  $\frac{1}{2}$  کو تباؤ کسطح بیان کریں اسمین ل کوئی مثبت صحیح عدد ہے

(۳۱) مساوات جم ل =  $\frac{1}{2}$  + جم ل سے جب ل کے واسطے کوئی صورت جب ۲ ل کی

رقمیں میں دریافت کرو اور تباؤ کو جذر بر کیا مناسب علامت ہوتی ہے

(۳۲) اگر جملہ  $\frac{1}{2}$  (ر + سہ) + ب (ر + سہ) + ب (ر + سہ) میں

ایک ہی قیمت بر کی سب قیمتوں کے واسطے رہی تو

ا - ب ب = (ب - ا) ب (جب سہ - سہ)



لوکارشی اور علم شلتی جدولون کا استعمال

باب یازم

(۳۳) اگر مجموعہ دو زاویوں کا معلوم ہو تو ثابت کرو کہ مجموعہ اوکے جواب کا نہایت بڑا اور مجموعہ اوکے

ماسنون کا نہایت کم اوس صورتیں ہوگا کہ زاویے آپس میں برابر ہوں

(۳۴) اگر  $ا + ب + س = ۹۰$  تو ثابت کرو کہ  $س + ا + ب + س$  کی کم از کم

قیمت واحد ہے

(۳۵) اگر  $ا + ب + س = ۱۸۰$  تو ثابت کرو کہ  $ا + ب + س$  کی قیمت کم از کم

(۳۶) اگر  $ا + ب + س = ۱۸۰$  تو

$ا + ب + س + ا + ب + س$  بڑا بہ نسبت

$ا + ب + س$  کے ہے

(۳۷) مساوات  $ا + ب + س = ا + ب + س$  کی شرائط کو جو تین حادی زاویے پر اکریں

او نکالنا مجموعہ ۱۸۰ سے چھوٹا ثابت کرو

(۳۸) اگر ہر ایک زاویہ  $ا$  اور  $ب$  اور  $س$  میں سے ۹۰ سے کم ہو تو جب  $(ا + ب + س)$

جب  $ا + ب + س$  جب  $ا + ب + س$  ہوگا

(۳۹) حد اقصى (جمع سے) کی جن لانا نہایت زیادہ ہو دریافت کرو

۴۰ (جمع سے) کی حد قصى جن لانا نہایت زیادہ ہو دریافت کرو

۴۱ ثابت کرو کہ جب بڑا اس بر - سیکھے سے ہے

## گیارہواں باب

لوکارشی اور علم شلتی جدولون کا استعمال

(۱۵۱) اسے پہلے درزاویوں میں ہم نے اس بات کو بیان کیا ہے کہ علم شلتی نسبتوں کی جدولوں کا

حساب کس طرح ہوتا ہے اور لوکارشوں کی جدولیں کس طرح مرتب ہوتی ہیں اب ہم یہ بیان

کرنے لگے کہ جب یہ جدولیں چاہ ہو کر مرتب ہو جائیں تو او انکو کس طرح استعمال میں لائیں

- لوکارشوں کی جدولوں کے حساب مختلف مراتب اعشاریہ تک ہوتی ہیں جس کی جدول



باب از دہم  
میں اوسکی لوکارٹھم ۱۳۵۴۷۵۲۷۵ کی لکھی ہوئی ہے اسکو اعشاریہ طور پر بناؤ اور عدد بیانی  
۲ لکھو اسی واسطے

$$۲۵۷۲۷۵۴۷۵۲۷۵ = ۵۳۲۷$$

$$۴۵۷۲۷۵۴۷۵۲۷۵ = ۵۳۲۷۰$$

$$۲۵۷۲۷۵۴۷۵۲۷۵ = ۵۰۵۳۲۷$$

آخر مثال میں عدد بیانی - ۲ ہے اوسکو ۲ پر خط کھینچ کر لکھا کرتے ہیں  
اب فرض کرو کہ عدد معلوم جدول میں موجود نہیں ہے مثلاً جدول میں ہے ..... اتنا  
لوکارٹھم لکھی ہوئی ہے اور سکو لوکارٹھم ۲۳۲۷۰۳۳۲ کی دریافت کرنی ہے پس جدول  
لوکارٹھم ۲۰۰ ۵۳۲۷ اور ۵۳۲۷۰۳۰۰ کی لکھیں تو

$$۶۵۷۲۷۵۴۷۵۴ = ۵۳۲۷۰۳۰۰$$

$$۶۵۷۲۷۵۴۷۵۴ = ۵۳۲۷۰۲۰۰$$

$$۵۰۰۰۰۰۰۸۲ = \text{تفاوت}$$

اب ان دو لوکارٹھم کے درمیان جو جدول سے لکھی ہیں لوکارٹھم مطلوب ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ  
عدد میں ۱۰۰ کے بڑھنے سے لوکارٹھم میں ۸۲ ..... بڑھتے ہیں اور یہ ہم فرض  
کرتے ہیں کہ اسی نسبت سے لوکارٹھم میں افزائش ۳۲ کے بڑھنے سے ہوگی  
فرض کرو کہ اوس زیادتی کو جو ۲۰۰ ۵۳۲۷ کی لوکارٹھم پر زیادہ کرنے سے لوکارٹھم  
۲۳۲۷۰۳۳۲ کی حاصل ہوتی ہے لا تعبیر کرتا ہوں تو بموجب فرض مذکور کے

$$۵۰۰۰۰۰۰۸۲ :: ۳۲ :: ۱۰۰$$

$$\text{اس واسطے} = ۱۰۰ \times \frac{۳۲}{۵۰۰۰۰۰۰۸۲} = ۵۰۰۰۰۰۰۲۸$$

$$۶۵۷۲۷۵۴۷۵۴ = ۵۰۰۰۰۰۰۲۸ + ۶۵۷۲۷۵۴۷۵۴ = ۵۳۲۷۰۳۳۲$$

(۱۵۲) ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ لوکارٹھم میں افزائش تناسب عدد افزائش کی ہوتی ہو اسکو

باب نوزدہم اصول اجزاء مناسب کہتے ہیں اگر یہ اصول بالکل صحیح نہیں مگر اس قدر صحیح ہے کہ اس سے علمیات میں کوئی خلل حساب کے اندر نہیں پیدا ہوتا

(۱۵۵) عمل جو دفعہ بالا میں کیا گیا ہے وہ بڑی بڑی جدولوں کے ذریعہ سے اس طرح آسانی ہوتا ہے کہ فرض کرو ہر کو کار شم ۲۳۷۵۳۷۸۷ کی مطلوب ہے

اجزاء مناسب	لوک
۱۸۵	$۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$
۳۷۰	$۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$
۵۵۵	تفاوت = ۱۸۵
۷۴۰	اب یہ جب عمل دفعہ ۱۵۳ کے ۱۸۵ کو بجا دینے میں
۹۲۵	یعنی $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$ میں ضرب دینی چاہئے
۱۱۱۰	اب یہ چھوٹی جدول اجزاء مناسب کی بنی ہوئی فقط اس کے اندر دیکھ
۱۲۹۵	لینے سے ضرب ہو جائیگی اور یہ جدول اوسی صفحہ پر جدول میں منقطع ہوتی ہے جسے
۱۴۸۰	کہ دونوں کار شمن نقل کر کے لکھتے ہیں اب اس چھوٹی جدول سے معلوم ہوتا ہے
۱۶۶۵	کہ $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$ اور $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$

تقسیم کرنے سے  
 کہ  $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$  اور  $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$  سے اور ان نتائج سے ۱۰ اور ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ تقسیم کرنے سے

ہر کو تین خبر مطلوب معلوم ہونگے اور عمل کی یہ ترتیب ہوگی کہ

لوک  $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$

زیادہ کروا کر  $\frac{۱}{۲}$

۱۲۹۵

اب سات مرتبہ اعشاریہ کے رکھنے سے تو یہ حاصل ہوا کہ

لوک  $۷۵۳۷۵۳۷۸۷ = ۲۳۷۵۳۷۸۷$

(۱۵۶) ہم نے مثال میں عدد معلوم کو صحیح مانا ہے اگر وہ کس اعشاریہ ہو یا مخلوط کس اعشاریہ اور صحیح سے ہو تو علامت اعشاریہ کو نقطہ کر کے اوس عدد کو صحیح مانکر

باب ازیم

۱۰۴ لوکارٹی اور علی شلٹی جہ و لون کی استعمال نی

لوکار شم دریافت کرو اور اس طرح عدد صحیح مانکر جو لوکار شم نکلے اوسین مناسب عدد دیا  
لکھو تو لوکار شم مطلوب ہو جائیگی مثلاً کمو لوکار شم ۲۳۲۵۳۲۸  
کی اور ۵۳۲۸ کی دریافت کرنی تھی اعشاریہ حصہ لوکار شم ۵۳۲۸۰۰۰۰

1536. 2. 42 = 523453216 کوک

۲۵۳۷۰۲۰۷۷ = ۲۳۳۵۵۳۲۸۷ لوک

(۱۵۷) لوکارثم معلوم کے موافق عدد دریافت کرو  
اگر اعشاریہ حصہ لوکارثم کا جدول میں مل جائے تو اس کے موافق عدد کو اور اس عدد میں غلطیاں  
موافق عدد بیانی کے عدد میں لکھو مثلاً وہ عدد دریافت کرو کہ جسکی لوکارثم کے  
۱۳۰۲۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰۲۱۲۲۲۳۲۴۲۵۲۶۲۷۲۸۲۹۳۰۳۱۳۲۳۳۳۴۳۵۳۶۳۷۳۸۳۹۴۰۴۱۴۲۴۳۴۴۴۵۴۶۴۷۴۸۴۹۵۰۵۱۵۲۵۳۵۴۵۵۵۶۵۷۵۸۵۹۶۰۶۱۶۲۶۳۶۴۶۵۶۶۶۷۶۸۶۹۷۰۷۱۷۲۷۳۷۴۷۵۷۶۷۷۷۸۷۹۸۰۸۱۸۲۸۳۸۴۸۵۸۶۸۷۸۸۸۹۹۰۹۱۹۲۹۳۹۴۹۵۹۶۹۷۹۸۹۹۱۰۰

جدول میں نہ پائے اور چونکہ عدد بیانی ۲ ہے اسلئے موجب دفعہ ۱۸۲ کے ایک صفر آخر میں  
نہ ۱۸۲ کے زیادہ کر کے علامت اعشاریہ لکھیں اس واسطے لوکارثم معلوم کا عدد مطلوب

۵۰۵۳۴

اب فرض کرو کہ جدول میں لوکارثم معلوم کا حصہ اعشاریہ کسی لوکارثم کے بالکل مطابق نہیں  
مثلاً فرض کرو کہ لوکارثم معلوم ۴۰۲۰۷۳۵ آہر اب اسکا اعشاریہ حصہ بالکل مطابق  
جدول میں نہیں ملتا مگر یہ ہم دیکھتے ہیں کہ عدد ۲۳۴۵۵۴ کے مطابق لوکارثم  
۴۰۲۱۶۹ ہے اور عدد ۲۳۴۵۵۴ کے مطابق لوکارثم ۴۰۱۹۸ ہے۔ پس  
لوک  $۴۰۲۱۶۹ - ۲۳۴۵۵۴ = ۴۵۳۱۶۹$

لوک ۲۳۲۵ = ۲۱۶۹ - ۳۶۰

لوک ۲۳۲۵۳ = ۱۹۸۴ × ۳۷۵

تفاوت = 5000185

اور زیادتی لوکارشم معلوم کے افشاریہ حصہ کی ۱۹۸۷ء سے ۲۰۰۷ء اور ۱۹۸۶ء سے  
یعنی ۹۰۰۰۰۰ ہے عدد مطلوب درمیان ۵۴۳۷۵۴ اور ۲۳۷۵۳ کے واقع ہے

تاریخ: ۱۰۵ / ۱۰۵ / ۱۰۵

فرض کرو دوس زیادتی کو تغییر کرتا ہے جو عدد مطلوب ۲۳۴۵۳۲۵۳ پر گرتا ہے تو اس حالت کے فرض کرنے سے کہ زیادہ عدد کا متناسب از دیو لو کارشم کے ہوتے یہ سہو حاصل ہو گا کہ

2:1::5...4::5...185

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{40}{100} = 0.4 \text{ خط}$$

اس سوال کے لئے  
 $123456789 = 123456789$

اور لوگ ۸۶۳۴۲۵۰ = ۵۴۲۰۰۰۰

پس عدد مطلوب ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

(۱۵۸) ہم ۹ کو ۱۸۵ تقسیم کرنے کی محنت سے اس طرح سچ سکتی ہیں کہ دفعہ ۵۵ کی اصل اجزاء مناسب کو استعمال میں لائیں اور اگر عمل قسمت کریں تو اس طرح وہ ہوگا کہ

110) 9.50 (144)  
 24.  
 140.  
 100.  
 12.  
 110.

اب حواصل ضرب ۶۰۰ اور ۱۳۸۰ اور ۱۱۱ کی جدول مرجع میں موجود ہیں اسلئے  
فقط تفریق کرنی ضرورت ہے اور مراتب عمل کی اس طرح ہونگی

$$\begin{array}{r} 9. \\ 25. \\ \hline 14. \\ 15. \\ \hline 12. \\ 11. \end{array}$$

(۱۵۹) اب ہم بعض مثالیں کو کارِ شمع کے استعمال کو دیتے ہیں مثلاً حاصل ضرب ۵۵۰-۱۲۹۷ اور ۵۵۰-۱۲۹۷ کا دریافت کرو

۳۵۹۲۹۸۹۷ = ۳۹۷-۵۲ لک

4.

A. 2.



باب یازدهم

$$350424940 = 34605200 \text{ روپيا}$$

15100 kg 90 = 125411 لوک

167  
5A

$$151004990 = 1554110A$$

١٥٠٧٢٩٤٠

$\overline{N5440N44} =$  لوکارنو کے مجموعہ کے ۷۷

اعشار حصہ کوک ۶۴۲۸ بکری ۹۴۵۴۵۵۹

$$\begin{array}{r} 6^{\circ} \\ 44 \\ \hline 7. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 147666 \end{array}$$

سکتا

ایس عدد مطلوب ۷۷۵۸۶۲۸۷ ہر علامت اختیار کا مقام عدد بیانی ہر معلوم

(۱۴۰) ۵۱۲۳۴۵۴۶ کو ۵۸۷۶۵۴۳۲۱ تقسیم کرو

$$15.912911 = 15.912911$$

Fill  
ro

4

50

TS-910186 = 51PMNO46

15649422 = 055864

۲۲

9

$$15639384 \div 5 = 3127876.8$$

15.9101N2

1564444.

تفریق کرنے سے

اعشار حصہ لوک ۲۲۸۹۶ = ۱۲۸۴ SP OP.

21

7

141

7

F.

5529455

باب دوم ۱۰۷ نوکری اور شرم سنی جلد اولیٰ ۱۰۷  
پس عدد مطلوب ۲۲۹۷۰۰۲۲ سی اب بیان دو صفرا فرمیں ہیں اسو

عدد بیانی نوکری شرم میں ۳۳۳  
(۱۶۱) ۳۳۳۱۸۰۲۳۳ کا کعب دریافت کرو

$$T 50.22522 = 180.233$$

۴۱

۳

$$T 50.22543 = 180.234$$

$$T 50.23449$$

$$50.234.1 = 3214$$

۷۸  
۶۷

۵  
۸

$$110. 3214258$$

یہاں ۳۲۱۴۲۵۸

(۱۶۲) خیر الکعب ۳۳۳۳۳۳۳ کا دریافت کرو

$$T 504384.4 = 3344324$$

۷۱

۶

$$T 5043843 = 33443245$$

اب ۳۳۳۳۳۳۳ + ۱ کو ۳ پر تقسیم کرنا ہو یعنی ۳۳۳۳۳۳۳ + ۱

کو ۳ پر تقسیم کرنا ہی آسانی کے واسطے عدد کو اس طرح تقسیم کر کے لکھو کہ ۳۳۳۳۳۳۳ + ۱

اور پھر اسکو ۳ پر تقسیم کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ ۳۳۳۳۳۳۳ + ۱ یعنی ۳۳۳۳۳۳۳

$$T 3333333$$

$$3333333 = 1552$$

۱۰۰

$$2. 1552.2$$

پس عدد مطلوب ۱۵۵۲۰۲ ہوگا



باب یازدهم ۱۰۸ کوکری اور علم مثلثی جدولوں کا استعمال

اب ہم علم مثلثی جدولوں کا حال لکھتے ہیں کہ کس طرح ان کو استعمال میں لائے جائیں  
(۱۹۳) زاویہ معلوم کی جیب دریافت کرو

اگر زاویہ معلوم جو ب کی جدول میں مل جائے تو اس کے معادی جو جیب لکھی ہوئی ہو اس کے نقل کرو  
وہ جیب مطلوب ہوگی اور اگر نہ ملے تو زاویہ دو زاویوں کے درمیان جو جدول میں ملے  
ہوگا پس اس کے واسطے یہ عمل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ جیب ۲۵۰۳۵ کی  
دریافت کرنی ہے اب جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جیب } ۲۵۰۳۵ = ۳۱۵۳۱ \times ۰.۷۹۲۵$$

$$\text{جیب } ۲۵۰۳۵ = ۱۹۲۵۹ \times ۰.۷۹۲۵$$

تفاوت ۲۵۰۳۵ - ۱۹۲۵۹ = ۵۷۷۶  
جیب مطلوب ان دو جیب کے درمیان واقع نہیں جنگو جدول سے ہم نے نقل کیا ہے  
فرض کرو کہ جیب مطلوب جب قدر جیب ۲۵۰۳۵ سے زیادہ ہو اس زیادتی کو  
لے تعیر کرتا ہے اور یہ بیان لیا ہے کہ جیب کی زیادتی تناسب زاویہ کی زیادتی کے ہوتی  
اسی واسطے

$$\frac{۲۵۰۳۵}{۵۷۷۶} = \frac{۰.۷۹۲۵}{x} \Rightarrow x = \frac{۰.۷۹۲۵ \times ۵۷۷۶}{۲۵۰۳۵} = ۰.۰۰۰۸۶۳$$

$$\text{جیب } ۲۵۰۳۵ = ۰.۰۰۰۸۶۳ + ۰.۷۹۲۵ = ۰.۷۹۳۳۶۳$$

اب ہم یہ بیان پراخ کر مناسب کو مان لیا اور اس کو ساری باب میں بنائے گا  
تحقیقات کافی آئندہ باب میں کر کے لکھینگے جسے اطمینان حاصل ہو جائیگا  
(۱۹۴) جیب معلوم کے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر جیب معلوم جو ب کی جدول میں بالکل مطابق ملے تو زاویہ فوراً معلوم ہو جائیگا  
اور اگر نہ ملے تو یہ وہی عمل کرو جو اس صورت میں کرتے کہ جیب معلوم دو جیب مندرجہ  
جدول کے درمیان واقع ہو مثلاً زاویہ دریافت کرنا جس کے جیب ۵۹۶۰۸۱ ہے  
جدول سے معلوم ہے

باب بارہم ۱۰۹ لوکاری اور علم متقی جدولوں کا استعمال

$$\text{جب } ۱۴^\circ = ۱۶۵۱ \text{ } ۶۹$$

$$\text{جب } ۱۱^\circ = ۹۹۵۶۵ \text{ } ۶۹$$

$$\text{تفاوت } = ۰.۰۰۲۰۸۶$$

جب معلوم کے زیادتی جب  $۱۱^\circ$  پر ہے کہ

$$۶۹۶۰.۸۸۶ - ۹۹۵۶۵۶۵ = ۱۳۲۱ \text{ یعنی } ۰.۰۰۱۳۲۱$$

زاویہ مطلوب اون دوزاویوں کے درمیان واقع ہے جس کے جواب جدول سے لگی ہیں فرض کرو  $۱۱^\circ$  اسے جس قدر زاویہ زیادہ ہو اس کی ثانویوں کی تعداد ہے

$$۰.۰۰۲۰۸۶ : ۵۰۰۰۱۳۲۱ :: ۶۰ : ۴۰$$

$$\text{اسی طرح } ۴۰ = \frac{۶۰ \times ۱۳۲۱}{۲۰۸۶} = \frac{۵۰۰۰۱۳۲۱}{۲۰۸۶} \times ۶۰$$

اسی طرح زاویہ مطلوب  $۱۱^\circ$  اسے

(۱۶۵) زاویہ معلوم کی جب التمام دریافت کرو

اگر زاویہ معلوم جدول میں موجود ہو تو زاویوں کے جواب التمام کی جدول میں جدول مطلوب فوراً معلوم ہو جائیگا اب ہم وہ صورت لکھتے ہیں کہ جس میں زاویہ معلوم درمیان دوزاویوں کی جدول میں واقع ہو مثلاً جب التمام  $۱۱^\circ$  سے  $۲۵^\circ$  کی دریافت کرنی تو جدول سے یہ معلوم ہوگا

$$\text{جب } ۱۱^\circ = ۱۲۲۳۰.۳$$

$$\text{جب } ۲۵^\circ = ۱۲۰۲۶۰$$

$$\text{تفاوت } = ۰.۰۰۲۰۸۳$$

چونکہ اول ربع میں جب زاویہ بیش از حد التمام کم ہوتی ہے تو جب التمام مطلوب کم  $۱۱^\circ$  سے جب التمام سے ہوگی اور جب التمام مطلوب اون دونوں جواب التمام کے درمیان واقع ہے تو

جدول سے نقل کی ہیں  
فرض کرو کہ وہ جب التمام  $۱۱^\circ$  سے  $۲۵^\circ$  سے بقدر کم کے کم ہیں تو

$$4 : 25 :: 3.7 : 50000$$

$$\frac{4}{25} = \frac{3.7}{50000} \times 50000 = 7400$$

$$\text{جسم } 7400 = 50000 - 7400 = 42600$$

(۶۶) جس زاویہ کی جیب التمام معلوم ہو اسکو دریافت کرو

اگر جیب التمام معلوم جدول میں ملے تو زاویہ مطلوب فوراً معلوم ہو جائیگا اب ہم وہ صورت لکھ رہے ہیں کہ جیب التمام معلوم دو جیب التمام کے درمیان واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا ہو جسکی جیب التمام ۷۸۹۸۱۶ ہے جدول سے ہمکو معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جسم } 78 = 1137$$

$$\text{جسم } 72 = 1491.6$$

$$\text{تفاوت} = 2.28$$

اب جیب التمام معلوم جیب التمام ۷۸ سے بقدر ۱۱۳۷ سے بقدر ۷۸۹۸۷۸ کے یعنی ۱۲۸۶ کے کم ہے پس زاویہ مطلوب دو زاویوں کے درمیان واقع ہے جنکو جدول سے نقل کیا ہو فرض کرو کہ ۷۸ سے بقدر ۱۲۸۶ کے زاویہ مطلوب ۷۸ ہے

$$2.28 : 50000 :: 60 : 50000$$

$$\frac{2.28}{50000} = \frac{60}{50000} \times 2.28 = 38$$

پس زاویہ مطلوب ۷۸ ۳۸ ہے

(۶۷) اب کچھ ضرور نہیں کہ اور علم مثلثی نسبتوں کی بھی مثالیں دی جائیں بری بات قابل یاد رکھنے کے یہ ہے کہ اول ربع میں زاویہ کے برہنے سے ماس اور قاطع الزاویہ برہنہ ہو ماس التمام اور قاطع التمام کہتا ہے پس جیب کی طرح سے ماس اور قاطع الزاویہ کہلاتا ہو سکتا ہے اور جیب التمام کی طرح ماس التمام اور قاطع التمام کا حال لکھا جاسکتا ہے

باب ازیم <sup>۱۱۱</sup> علم شلتی جملوں کی جدولیں جنکا ذکر ہم نے لکھا ہے اصلی یا طبعی جدولیں جملوں کی  
(۱۶۸) کہلاتی ہیں اور اس اصلی طبعی کی قید اس لئے لگائی جاتی ہے کہ او کی تیز اون جدولوں سے  
ہو جا جنکا ذکر ہم آگے کرتے ہیں جو ب کی جدول کو جدول اصلی جو ب کی کہتے ہیں اور اگر  
ہم لوکارثم تمام جو ب کی لیکر جدول مرتب کریں تو اسکو لوکارثمی جدول کہیں گے اور اسے  
ہی جو ب التمام کے اور ماسون کی لوکارثمی جدول مرتب کر سکتے ہیں اور علی ہذا القیاس  
اور علم شلتی جملوں کی اور اسکو لوکارثمی جدول جو ب التمام اور لوکارثمی جدول ماسون کی  
کہتے ہیں عرض جس جملہ کی لوکارثمیں لو اوسیکی لوکارثمی جدول کہلائیگی <sup>اختصار</sup>  
(۱۶۹) بڑا فائدہ ان لوکارثمی جدولوں سے حساب کرنیکے اندر یہ ہے کہ حساب میں  
بہت لوکارثم کی اعانت سے ہو جاتا ہے اور اسکا حال بفضل اسوقت کہل جاگیا کہ ہم  
شلتو نکاح لکھینگے اور ہم نے یہ بیان کر دیا ہے کہ یہ بات بہت ظاہر ہے کہ علم شلتی جملوں  
کے جدولوں کی جدول کے لوکارثم کی تیز سے لوکارثمی جدول مرتب ہو جاگی اور اس خصوصیت کا  
حال اعلیٰ درجہ کا لکھینگے اوسمیں یہ بھی بیان کریں گے کہ ان لوکارثمی جدولوں کو کام لانگے  
اور اونکا کچھ تعلقی اصلی جملوں کی جدولوں سے نہیں ہوگا اب لوکارثمی جدولوں کا حال  
لکھتے ہیں  
(۱۷۰) چونکہ کسی زاویہ کی جیب ایک سی ہرگز نہیں ہوتی تو جیب کی لوکارثم کبھی جیب نہیں  
اور یہی کیفیت جیب التمام کی ہے اور جو زاویہ ۹۰ سے کم ہوگا اوسکی ماس کی لوکارثم  
بھی منفی ہوگی اور جو زاویہ ۹۰ سے بڑا ہوگا اوسکا ماس التمام منفی ہوگا اب اس منفی  
مقادیر سے بچنے کے لئے جدولوں میں ہر علم شلتی جملہ بڑا زیادہ کر دیتے ہیں اور پھر اسکو  
جدولیں مندرج کرتے ہیں اور جو لوکارثم اس طرح زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہو اسکو  
لوکارثم جدولی کہتے ہیں اور اسکو حرف ل سے تعبیر کرتے ہیں پس ل جیب اسے مراد  
لوکارثم جدولی جیب ل کی ہے اور وہ برابر اصلی لوکارثم جیب ل اور دس کے

ہوتی ہے حسابوں میں جو اس دس کے ضرب کا خیال رکھا جائے اور اسی کام سنوں کے حل کرینیں ٹریگا اب آگے ہم لوکاری جدول کی جدولوں کا استعمال کریں گے (۱۷۱)

اگر زاویہ معلوم جدول لوکارثم جدول میں مل جائے تو نتیجہ مطلوب ہو فوراً معلوم ہو جائیگا اب ہم اوس صورت کو بیان کرتے ہیں کہ جس میں زاویہ دو زاویوں کے درمیان جدول میں واقع ہو مثلاً لوکارثم جدولی جیب ۴۵ ۳۵ کی دریافت کرنی ہو جدولی کے ہکو معلوم ہے

$$\text{ل جیب } ۴۵ \text{ } ۴۵ = ۳۰ \quad ۹۵۸۲۶۳۶۷۸$$

$$\text{ل جیب } ۴۵ \text{ } ۴۵ = ۲۰ \quad ۹۵۸۲۶۳۲۶۲$$

$$\text{تفاوت} = ۵۰۰۰۰۲۱۲$$

پس لوکارثم جدولی جیب کے اون کے درمیان واقع ہیں جو اور جدول میں دیکھ کر لکھتے ہیں فرض کرو کہ لوکارثم جدولی جیب ۴۵ ۳۵ سے جس قدر وہ زیادہ ہو اوس زیادتی کو لکھتے ہیں کہ اسے تو موافق اصول اجزاء تناسب کے

$$۵۰۰۰۰ : ۲۱۲ :: ۴۵ : ۱۰$$

$$\text{پس } ۱۰ = \frac{۲۱۲ \times ۴۵}{۵۰۰۰۰} = ۰.۹۵۴$$

$$\text{اسی طرح ل جیب } ۴۵ \text{ } ۴۵ = ۳۰ + ۰.۹۵۴ = ۳۰.۹۵۴ \quad ۹۵۸۲۶۳۵۸۹$$

(۱۷۲) لوکارثم جدولی جیب کی معلوم ہے او کے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر لوکارثم جدولی معلوم جیب کی جدول میں مل جائے تو زاویہ مطلوب فوراً معلوم ہو جائیگا اب ہم وہ صورت لکھتے ہیں جس میں لوکارثم جدولی معلوم جدول کے اندر دو لوکارثم جدولی کے اندر واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا ہو جس کی لوکارثم جدولی جیب کی ۴۵ ۳۵ ۲۸ ۹۴

ہو اور جدول کے ہکو معلوم ہے

باب بارہم لوکاری اور علم تلسی جدولوں کا استعمال

$$\text{ل جب } ۴۴^{\circ} ۱۱' = ۹۵۸۴۳۴۹۴۳$$

$$\text{ل جب } ۴۴^{\circ} ۱۱' = ۳۰ = ۹۵۸۴۳۴۰۰۰$$

$$\text{تفاوت} = ۴۱۴ = ۵۰۰۰۰$$

لوکارثم جدولی جب معلوم کی زیادتی  $۴۴^{\circ} ۱۱'$  کے لوکارثم جدولی جیب کے بقدر  $۹۵۸۴۳۴۸۹۴ - ۹۵۸۴۳۴۰۰۰$  یعنی  $۹۵۸۴۳۴۸۹۴$  کے ہے

زاویہ مطلوب در میان اول دوزاویوں کے واقع ہے جنکو جدول میں لکھا ہے فرض کرو کہ بتدریج زاویہ  $۴۴^{\circ} ۱۱'$  سے زیادہ ہو اور ان ثانیوں کی تعداد کون تعبیر کرتا ہے تو

$$۴۱۴ : ۵۰۰۰۰ :: ۱۸۷ : ۱۰۰۰۰$$

$$\text{اسی طرح } ۱۸۷ = \frac{۱۸۷ \times ۱۰}{۴۱۴} = ۴۵۰۰۰$$

اسی طرح زاویہ مطلوب  $۴۴^{\circ} ۱۱'$  کے  $۳۸۷$  کے (۱۷۳) زاویہ معلوم کی لوکارثم جدولی جیب التمام کی دریافت کرو

اگر زاویہ لوکارثم جدولی جیب التمام میں ملجائی تو نتیجہ مطلوب فوراً حاصل ہو جائیگا اب ہم اس صورت کو لکھتے ہیں کہ جسمین زاویہ معلوم اور دوزاویوں کے در میان واقع ہو جو جدول میں درج ہیں مثلاً  $۴۴^{\circ} ۱۱'$  کے لوکارثم جدولی جیب التمام کی دریافت کرنی ہو تو جنکو جدول میں معلوم ہے

$$\text{ل جم } ۴۴^{\circ} ۱۱' = ۳۰ = ۹۵۸۵۲۵۰۸۹$$

$$\text{ل جم } ۴۴^{\circ} ۱۱' = ۳۰ = ۹۵۸۵۲۵۵۸۷$$

$$\text{تفاوت} = ۲۰۰ = ۵۰۰۰۰$$

اب جدول سے جو دوزاویں لکھی ہیں ان کے در میان مطلوب لوکارثم جدولی جیب التمام کے واقع ہو اور  $۴۴^{\circ} ۱۱'$  کے لوکارثم جدولی جیب التمام سے چھوٹی ہے فرض کرو اس کی تعبیر کرتا ہے

$$۲۰۰ : ۵۰۰۰۰ :: ۲۰۰ : ۵۰۰۰۰$$

$$\text{پس } ۲۰۰ = \frac{۲۰۰ \times ۵۰۰۰۰}{۵۰۰۰۰} = ۲۰۰$$

$$\text{اسی طرح ل جم } ۴۴^{\circ} ۱۱' = ۳۰ = ۹۵۸۵۲۵۰۸۹ - ۹۵۸۵۲۵۵۸۷ = ۵۰۰۰۰$$

(۱۴۴) لوکارثم جدولی جیب التمام کی معلوم ہے اس کے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر جدول میں لوکارثم جدولی جیب التمام ملے تو فہرست فوراً مطلب حاصل ہو جائیگا اور نہیں پڑے عمل کرو جو اس صورت میں کرتے کہ لوکارثم جدولی جیب التمام معلوم جدول دو لوکارثموں کے درمیان واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا مطلوب ہے جس کی لوکارثم جدولی جیب التمام کی

۸۶ ۸۵۵۱ ۹۵ ہے جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ل جیب } ۸۶^\circ \text{ اے } ۹۵۸۵۵۵۲۶۴ = ۳۰$$

$$\text{ل جیب } ۸۴^\circ \text{ اے } ۹۵۸۵۵۵۰۴۰ = ۴۰$$

$$\text{تفاوت } = ۲۰۰۰۰۰۲۰۴$$

تو لوکارثم جدولی جیب التمام معلوم  $۸۶^\circ$  اے  $۳۰$  کی لوکارثم جدولی جیب التمام سے بقدر  
 $۹۵۸۵۵۵۲۶۴ - ۹۵۸۵۵۵۰۴۰$  یعنی  $۲۰۰۰۰۰۱۴۸$  کے کم ہے  
 زاویہ مطلوب ضرور اون دو زاویوں کے درمیان واقع ہو جو جدول سے نقل کئے ہیں فرض کرو کہ  
 زاویہ مطلوب کو جو زیادتی  $۸۶^\circ$  اے  $۳۰$  پر حاصل ہو سکے ثانیوں میں تعداد ہے تو

$$۲۰۴ : ۲۰۰۰۰۰۱۴۸ :: ۱۰ : ۱۰۰۰۰۰۰۰۰$$

$$\text{اسی واسطے } ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۱۰ = \frac{۲۰۴ \times ۱۰۰۰۰۰۰۰۰}{۲۰۴} = ۸۵۷$$

اسی واسطے زاویہ مطلوب  $۸۶^\circ$  اے  $۳۸۵۷$  ہے

(۱۴۵) کچھ ضرور نہیں معلوم ہوتا کہ اور علم مثلاً جملوں کی یہی تسالین لکھی جائیں ایک بڑی بات  
 یہ ہے اس کو یاد رکھنا چاہئے کہ اول رجبہ میں زاویہ بقدر  $۳۸۵۷$  ہے کا لوکارثم جدولی ماس کی  
 اور قاطع الزاویہ کی بڑی سی اس کی لوکارثم جدولی ماس التمام اور قاطع التمام کی گھسیکی اس کے ماس کی  
 قاطع الزاویہ کا بیان مثل جیب کے اور ماس التمام اور قاطع التمام کا بیان مثل جیب التمام کے ہو سکتا ہے

تسالین

- (۱) معلوم ہے کہ لوک  $۴۵۰۹۴۸۲۰۴ = ۱۲۴۴۰$  لوک  
 $۴۵۰۹۴۸۵۵۳ = ۱۲۴۴۱$  لوک  
 لوک  $۱۲۴۴۰۵۳۵$  دریافت کرو  
 (۲) معلوم ہے کہ لوک  $۵۰۲۴۸۱۵۲ = ۱۵۰۶۸۹$  لوک  
 لوک  $۵۰۲۸۸۵۵۸ = ۱۵۰۶۸۷$  لوک  
 نو وہ عدد دریافت کرو جسکی لوکار غم  $۵۰۲۸۸۳۵۵$  ہو  
 (۳) اور ایک جدول اجزاء متناسب کی اعداد درمیانی کو وسط بناؤ اور لوک  $۲۳۴۵۴۳۸$  کی دریافت کرو  
 لوک  $۲۳۴۷۰۲۵۴ = ۷۲۳۴۵۶$  لوک  
 لوک  $۳۷۰۲۷۲۵ = ۲۳۴۵۷$  لوک  
 (۴) وہ عدد دریافت کرو جسکی لوکار غم  $(۱۷۸۷۵۳۱۴۵)$  ہو اور یہ معلوم ہے کہ  
 لوک  $۱۲۴۴۶۹۷۸ = ۱۵۳۳۲۶$  لوک  $۱۲۴۴۶۹۷۸ = ۱۵۳۳۲۵$  لوک  
 (۵) معلوم ہے کہ لوک  $۵۰۸۶۰۲۴۴ = ۳۵۸۵۵$  لوک  
 لوک  $۵۰۸۶۰۳۵۶ = ۳۵۸۵۵۱$  لوک  
 لوک  $(۵۰۰۳۸۵۵۰۴)$  کی دریافت کرو  
 (۶) معلوم ہے کہ لوک  $۱۵۳۸۰۲۱۱۲ = ۲۴$  لوک  
 لوک  $۵۶۹۰۰۹۸۶ = ۴۵۸۹۸۹$  لوک  
 لوک  $۵۶۹۰۱۰۷۴ = ۴۵۸۹۹۰$  لوک  
 (۴۴) کو چہ مرتبہ کی اعشاریہ تک دریافت کرو  
 (۷) معلوم ہے کہ لوک  $۴۵۱۵۴۴۵۴۴ = ۱۴۲۷۱$  لوک  
 لوک  $۴۵۳۰۷۷۷۷۱ = ۲۰۳۱۳$  لوک  
 لوک  $۴۵۳۰۷۷۹۵۴ = ۲۰۳۱۴$  لوک  
 (۱۴۲۷۷۱) کو دریافت کرو  
 (۸) معلوم ہے کہ لوک  $۰۵۸۴۵۰۹۸۰ = ۷$  لوک  
 لوک  $۴۵۷۹۰۱۵۳ = ۵۸۷۵۱$  لوک  
 لوک  $۴۵۷۹۰۲۲۷ = ۵۸۷۵۲$  لوک



(۷) کو سات ہندسوں تک نکالو

(۹) معلوم ہے کہ لوگ  $2 = 300.10$  ی لوگ  $591240 = 55673491$

پانچویں مرتبہ کا نزول  $0.425$  کا دریافت کرو

(۱۰) معلوم ہے کہ لوگ  $2 = 2513438 = 2513438$  ی لوگ  $5122818 = 5122818$

قیمت  $2 \frac{1}{2}$  کی دریافت کرو

(۱۱) معلوم ہے کہ لوگ  $48 = 1948 = 1948$  ی لوگ  $5851397 = 5851397$  تفاوت کے وسط  $40 = 40$

قیمت  $4$  (۱۹۶۸۶) کو سات مرتبہ کی اعشاریہ تک دریافت کرو

(۱۲) لوگ  $10.3 = 128322 = 128322$  ی لوگ  $250.128322 = 250.128322$

(۱۳) کو دریافت کرو

(۱۳) قیمت  $47$  [۱ - (۱۵.۵)] کی دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

لوگ  $10.5 = 211893 = 211893$  ی لوگ  $250.211893 = 250.211893$

(۱۴) تقریباً قیمت  $7 \frac{1}{2}$  کی دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

لوگ  $2 = 300.10$  ی لوگ  $591240 = 591240$

لوگ  $329285 = 329285$  ی لوگ  $55673491 = 55673491$

لوگ  $35404 = 35404$

(۱۵) معلوم ہے کہ لوگ  $12 = 128322 = 128322$  ی لوگ  $5122818 = 5122818$

لوگ  $121548 = 121548$  ی قیمت

(۱۶)  $(25) - (1 \times 25)$  کو دریافت کرو

(۱۶) معلوم ہے کہ لوگ  $10.5 = 211893 = 211893$  ی لوگ  $5851397 = 5851397$

لوگ  $45024212 = 45024212$  قیمت

$\frac{1}{50} \left[ \frac{1}{(15.5)} - \frac{1}{(15.5)} \right]$  کو دریافت کرو

(۱۷) معلوم ہے جب  $۳۷ = ۳۷۳۱۳۷۳۷$

جب  $۲۸ = ۲۸۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷$  دریافت کرو

(۱۸) معلوم ہے کہ جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷$  کو دریافت کرو

(۱۹) معلوم ہے کہ جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷$  کو دریافت کرو

(۲۰) معلوم ہے کہ جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

جب  $۷۷$  کو دریافت کرو

(۲۱) معلوم ہے کہ ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$

ل  $۷۷$  کو دریافت کرو

(۲۲) معلوم ہے کہ ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  تفاوت  $۷۷۱۲۳۱۲۳$  کے واسطے

$۷۷۱۲۳۱۲۳ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  جو

(۲۳) معلوم ہے کہ ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  تفاوت  $۷۷۱۲۳۱۲۳$  کے واسطے

$۷۷۱۲۳۱۲۳ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  جو

(۲۴) معلوم ہے کہ ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  تفاوت  $۷۷۱۲۳۱۲۳$  کے واسطے

$۷۷۱۲۳۱۲۳ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  کو دریافت کرو اور نیز وہ زاویہ ہی دریافت کرو

کہ ل  $۷۷$  جو

(۲۵) معلوم ہے کہ ل  $۷۷ = ۷۷۱۲۳۱۲۳$  تفاوت  $۷۷۱۲۳۱۲۳$  کے واسطے



باب دوازدهم مسئلہ اجزاء تناسب کا

لوگ (ن + د) - لوگ ن =  $\frac{د}{ن}$   $\frac{د}{ن}$  =  $\frac{د}{ن}$   
 اب اس مساوات سے نتیجہ مطلوب ثابت ہو اس واسطے کہ اگر عدد د سے ن جدول جائز ہو گیا  
 موافق تبدیل لوکارثم میں تقریباً  $\frac{د}{ن}$  واقع ہوگا یعنی تبدیل لوکارثم میں تقریباً تناسب  
 تبدیل عدد کے واقع ہوتا ہے

(۱۷۸) اصول اجزاء تناسب کا اعداد کی لوکارثموں میں اس وجہ سے ایک خاص درجہ تک  
 عمل صحیح مانا گیا ہے جب ہم کو لوکارثم کسی عدد معلوم کی دریافت کرنی ہو تو ہم علامت اشارہ  
 کو عدد میں آخر سے یا رخ ہندسوں کے بعد لکھ سکتے ہیں تو عدد البسیر دو عددوں کے درمیان  
 ہو جائیگا کہ جنہیں فرق ایک کا ہو اور وہ دونوں جدول میں موجود ہیں اور یہ ہمیں ثابت کر دیا ہو کہ اسات  
 مرتبہ کے اشاریہ میں تو تبدیل عدد کا تناسب لوکارثم کے تبدیل ہوتا ہو پس اگر ضرورت ہو تو علامت  
 اشاریہ کے مقام میں تبدیل کریں اور اس کے مطابق عدد بیانی لوکارثم کا بنائیں تو اس طرح  
 ہم کو اصلی عدد معلوم کی لوکارثم معلوم ہو جائیگی اور اس طرح اگر ہم چاہیں تو لوکارثم معلوم کو  
 جدولوں میں درمیان دو لوکارثموں کی دریکہہ سکتے ہیں

(۱۷۹) اب ہم بتلائیں گے کہ دفعہ ۷۷ کے نتیجہ کو عملاً کس طرح استعمال میں لائیں گے ہم کو معلوم ہے کہ

$$\text{لوگ (ن + د) - لوگ ن} = \frac{د}{ن}$$

$$\text{اوزنیز لوگ (ن + د) - لوگ ن} = \frac{د}{ن} = \text{جر کے فرض کرو}$$

اب جرد و معلوم لوکارثموں کا تفاوت ہو اسلئے وہ جدول سے آسانی دریافت ہو جائیگا  
 اور (ن + د) کی لوکارثم دریافت کر نیکی لئے اس مقدار معلوم جبر کو کہ معلوم د میں  
 اور حاصل ضرب کو لوکارثم ن پر زیادہ زیادہ کرو اور اسی قاعدہ سے دفعہ ۵۳ میں عدد معلوم  
 کی لوکارثم دریافت ہوگی

اب فرض کرو کہ ہم کو لوکارثم معلوم کا عدد دریافت کرنا ہو فرض کرو کہ ن اور د + ۱  
 اعداد ہیں کہ ان کے درمیان عدد مطلوب واقع ہے اور عدد مطلوب کو ن + د

تعبیر کرو تو لوگ (ن + د) - لوگ ن معلوم ہے اوسکو لائے تعبیر کرو اور مقدار معلوم  
لوگ (ن + ۱) - لوگ ن کو فرسے تعبیر کرو تو دفر = لہ اسکو  $\frac{د}{ن}$  لے یہی قاعدہ

تھا جسکے موافق عمل دفعہ ۱۵۷ میں ہوا تھا

(۱۸۰) اب ہم یہ بتانگے کہ اصلی علم مثلثی جلوچ کے صورت میں کہاں تک اجزاء متناسب کا قاعدہ  
حاوی ہے اسکا حال ہر ایک جملہ کو جدا جدا لیکر لکھینگے اس تمام باب میں اس بات کو فرض  
کر لیا ہے کہ زاویے قائمی سے بڑے نہیں ہیں اور سب مثبت ہیں اور یہی ہمارا لکھنا کافی ہوگا  
اس واسطے کہ دفعہ ۵۵ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ہر ایک زاویہ کا ہر ایک علم مثلثی جملہ برابر ہوتا ہے  
بعض مثبت زاویہ کے اوسے علم مثلثی جملے کے یعنی جب برابر جب کے اور جم برابر جم علی التبع  
اور یہ مثبت زاویہ قائم سے بڑا نہیں ہوتا

(۱۸۱) بالعموم یہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی جب میں جو تبدیل ہو تقریباً متناسب زاویہ  
تبدل کے ہوتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ جب (بر + ھ) - جب بر = جب ھ جم بر - جب بر (ا - جم ھ)

= جب ھ جم بر (ا - مس بر ل جم ھ)

= جب ھ جم بر (ا - مس بر مس ھ)

اب فرض کرو کہ ھ تقیاس قوسی ایسے چھوٹے زاویہ کا ہو کہ جب ھ = ھ کے تقریباً

پس تقریباً جب (بر + ھ) - جب بر = ھ جم بر (ا - مس بر مس ھ)

اب فرض کرو کہ بر ایسا قریب ہے کہ نہیں ہے کہ مس بر بہت بڑا ہوا ہے

مس بر مس ھ کو ایسی ایک مقدار خفیف خیال کر سکتے ہیں کہ اوسکو جواب میں

نہ لگائیں اور اسے محو کر دیں تو ہمکو تقریباً یہ حاصل ہوگا کہ

جب (بر + ھ) - جب بر = ھ جم بر

اور اسی سے ہمارا دعوی ثابت ہے

اور السیجہ ہی جب (بر - حصہ) - جب بر = - حصہ جم ہو کے تقریباً  
 (۱۸۲) اب ہم یہ دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ دفعہ گذشتہ کے قاعدہ کو اگر استعمال کریں  
 تو غلطی کس قدر ہوگی اب ہم اس غلطی کی مقدار کو جانتے ہیں قیمت تقریبی  
 جب (بر + حصہ) - جب بر کی حصہ جم بر اور قطعی قیمت اوسکی  
 جب حصہ جم بر - (۱ - جم حصہ) جب بر ہے تقریبی قیمت کے دریافت کرنے کے لئے ہم قطعی قیمت  
 کے اولی رقم میں جب حصہ کو حصہ سے بدل دیں تو قطعی قیمت کی دوسری رقم کو محو  
 کر دیں تو ہمیں اور محسوب نہیں کرتے پس اول یہ خیال کرو کہ جب حصہ کے جگہ حصہ کے لکھنے سے  
 کیا فرق پڑنا ہو مقیاس قوسی ایک درجہ کے زاویہ کا ۱۸۰ ہر اور جب دفعہ ۱۳۰ کے  
 جب حصہ کا فرق حصہ سے زیادہ نسبت ۱۰۰ کے نہیں ہو سکتا پس اسے ثابت ہوا کہ ایک  
 درجہ کے زاویہ کے جب کا فرق مقیاس قوسی سے زیادہ ۱۰۰۰۰۰۰ سے نہیں ہو سکتا  
 اسے معلوم ہوا کہ اگر حساب کو سات مرتبہ کی اعشاریہ تک وسعت دیں تو کوئی غلطی ایک حصہ  
 کے زاویہ میں جب حصہ کو حصہ سے بدل دینے میں نہیں واقع ہوتی اسلئے بدھ حصہ اور سات اہم  
 تو غلطی واقع ہی نہیں ہوگی کہ حصہ کے ساتھ ایک دقیقہ کے مقیاس قوسی سے بڑی ہونی  
 قید لگائی جائے اب اس دوسری بات پر بحث کرتے ہیں کہ جب بر (۱ - جم حصہ) یعنی  
 جب بر جب حصہ کی رقم کو محسوب نہیں کرتے اوسکے سبب کس قدر غلطی واقع ہوتی ہے  
 چونکہ جب بر ہرگز بڑی واحد سے نہیں ہوتی اور جب حصہ چھوٹی نسبت حصہ کے ہے  
 اسولئے رقم غیر محسوب چھوٹی بہ نسبت حصہ کے ہے اور اگر حصہ مقیاس قوس ایک  
 دقیقہ کے زاویہ کا ہو تو حصہ چھوٹا بہ نسبت ۱۰۰۰۰۰۰ کے ہوگا پس اگر حساب  
 سات مرتبہ کی اعشاریہ تک کیا جائے تو رقم جب بر (۱ - جم حصہ) کو غیر محسوب  
 بنانے سے کچھ غلطی نہیں واقع ہوگی بشرطیکہ حصہ کے ساتھ قید ایک دقیقہ کی مقیاس  
 قوسی سے بڑی ہونی لگائی جائے

اسی طرح اگر ہم اصلی جواب کی جدول ایسی رکھیں کہ اوس میں ہر ایک دقیقہ کا حسابات مرتبہ کی اعشاریہ تک کیا گیا ہو تو اس حساب میں کچھ غلطی نہیں واقع ہوگی جو سادہ مرتبہ کے اعشاریہ تک اوس جیب زاویہ کا کیا جائے جدول میں دو کے درمیان واقع ہو ایہ حساب ہی حساب موافق اس صورت قانونی کے کیا جائے کہ

جیب (بر + ہ) - جیب بر = ہم بر  
(۱۸۳) اب ہم بتلائیں گے کہ یہ نتیجہ عمل میں کس طرح کام آئے گا ہم فرض کرو کہ اصلی جواب کی جدول سہار پاس ہے اور اوس میں ہر دقیقہ کے جیب لکھے ہوئے ہیں اور ہم کو جیب ایک ایسی زاویہ کے دریافت کرنی ہے جو جدول کے دو جیبوں کے درمیان واقع ہو پس فرض کرو کہ ک مقیاس قوسی ایک دقیقہ کے زاویہ کا ہے اور برابر بر + ک مقیاس قوسی جدول کے اون زاویوں کے مقیاس قوسی ہیں جن کے درمیان زاویہ معلوم واقع ہے اور بر + ہ مقیاس قوسی زاویہ معلوم کا ہے

جیب (بر + ک) - جیب بر = ک جم بر = فر کے فرض کرو

جیب (بر + ہ) - جیب بر = ہ جم بر = ہ فر

پس جیب (بر + ہ) = جیب بر + ہ فر = جیب بر + ہ فر

اسی میں تعداد ثانیوں کی اوس زاویہ کی ہے جس کا مقیاس قوسی ہ ہے

اب جدول کے دو متصل کے زاویوں کا تفاوت فر ہے اور سوائے جدول میں جلدی سے

مل سکتا ہے پس اس مقدار معلوم کو ہ فر میں ضرب دیں اور حاصل کو جیب بر زیادہ کریں تاکہ

جیب (بر + ہ) حاصل ہو اور یہی قاعدہ دفعہ ۱۶۳ کے اندر کام میں آیا تھا

اب ہم کو زاویہ مطابق کسی اصلی جیب معلوم کے دریافت کرنا ہے

تو فرض کرو کہ ک مقیاس قوسی ایک دقیقہ کے زاویہ کا ہے اور برابر بر + ک مقیاس قوسی

زاویوں کے ہیں جن کے درمیان زاویہ معلوم واقع ہونا چاہئے اور بر + ہ مقیاس قوسی زاویہ

مطلوب کا ہے تو جیب (بر + ہ) - جیب بر معلوم ہوگا اور سکولاسے اور مقدار معلوم

جب (بر + کل) - جب بر کو فرسے تعبیر کرو تو  $\frac{بر}{کل} = لا اسو سٹے$  =  $\frac{بر}{کل}$  اور  
فرض کرو کہ زاویہ میں جس کا مقیاس قوسی ہم ہر تعداد ثانیوں کی شہر تو  $\frac{بر}{کل} = لا اسو سٹے$

ث =  $\frac{بر}{کل}$  یہی قاعدہ دفعہ ۱۶۴ میں بیان ہوا ہے

(۱۸۴) جب بر قریب قریب کے ہو تو جم بر کے نہایت چھوٹا ہونے کے سبب رقم صہ جم بر بہت چھوٹی ہوگی بشرطیکہ صہ مقیاس قوسی چھوٹے زاویہ کا ہو پس دو زاویے جن میں سے ہر ایک قریب قریب ایک قائمہ کے ہو انکی جیبوں میں تفاوت نہایت کم ہوتے ہیں اور اس مطلب کو ادا اس طرح کیا کرتے ہیں کہ جب دو متصل کے زاویوں میں سے ہر ایک تقریباً برابر قائمہ کے ہو تو انکی جیبوں کا تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتا اس صورت میں ایک اور بات بھی قابل لحاظ ہے

جب (بر + صہ) - جب بر = جب صہ جم بر - (ا - جم صہ) جب بر

کمیت کے اعتبار سے دوسری رقم کی نسبت اول سے

جب بر (ا - جم صہ)

یعنی مس برس ہے ہر اور حسب وقت بر تقریباً برابر کے ہو تو یہ نسبت قابل لحاظ کر ہوگی بشرطیکہ صہ بدرجہ غایت چھوٹا نہ ہو پس دوسری رقم کو اول رقم کے ساتھ مقابلہ کرنے میں ساقط نہیں کرنا چاہئے اور اس بات کو اس طرح بیان کیا کرتے ہیں کہ جیبوں کا متصلہ میں سے ہر ایک مساوات تقریبی قائمہ کے ساتھ رکھتا ہو تو انکی تفاوت بقاعدہ ہوتے ہیں اب دو باتیں بیان ہوئیں ایک تفاوتوں کا قابل لحاظ کے نہ ہونا دوسری بات تفاوتوں کا بقاعدہ ہونا پہلی بات کے مقابلہ میں دوسری بات کی کچھ اصل نہیں ہے

(۱۸۵) ہم نے ثابت کیا ہے کہ تقریباً

جب (بر + صہ) - جب بر = صہ جم بر

بر کو کہے - بر سے بدلو تو

جب (کے - بر - صہ) - جب (کے - بر) = صہ جم (کے - بر)



یعنی جم (بر - حصہ) = جم بر = حصہ جم بر  
علامت حصہ کے بدلنے سے

جم (بر + حصہ) - جم بر = - حصہ جم بر

اس میں آسانی ہے کہ اس صورت کو ہم اور صورت سے مستنبط کیا ہو جس کو اپنی ثابت کیا ہو کیونکہ اس لئے  
بغیر کسی نئی تحقیقات کے مقدار غلطی کی معلوم ہو سکتی ہے لیکن یہ مدعا ہمارا ایک اور طرح سے بھی  
ثابت ہو سکتا ہو اور اس کا کچھ واسطہ پہلی صورت قانونی سے نہیں ہو گا اب ہم اس کو لکھتے ہیں  
(۱۸۶) بالعموم یہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی جیسا تمام میں جو تغیر ہوتا ہو وہ تقریباً متناسب  
زاویہ کے تبدل کے ہوتا ہے ہو کو معلوم ہے کہ

جم (بر - حصہ) - جم بر = جب حصہ جم بر - جم بر (ا - جم حصہ)

= جب حصہ جم بر (ا - جم بر) (جم حصہ)

= جب حصہ جم بر (ا - جم بر) (جم بر)

اب فرض کرو کہ حصہ تقیاس قوسی ایسی ایک چھوٹے زاویہ کا ہو کہ جب حصہ = حصہ کے تقریباً

جم (بر - حصہ) = جم بر = حصہ جم بر (ا - جم بر) (جم بر)

اب فرض کرو کہ بر ایسا چھوٹا نہیں ہے کہ ہم بر بہت بڑا ہو اس لئے ہم بر = حصہ کو سا قطر کر دو تو  
یہ حاصل ہو گا کہ

جم (بر - حصہ) - جم بر = حصہ جم بر تقریباً حاصل ہو گا

اور حصہ کے علامت بدلنے سے

جم (بر + حصہ) - جم بر = - حصہ جم بر

اور اتنے دعوی ہمارا ثابت ہو

(۱۸۷) دفعہ گذشتہ کے نتیجے سے ہم دفعات ۱۶۵ و ۱۶۶ کے قاعدہ و نکلا استخراج کر سکتے ہیں  
اس استخراج کو نکلی ترکیب وہی ہے کہ دفعہ ۱۸۳ میں مذکور ہوئی فقط یہ بات ہمیشہ خیال

باب دوم از مجموع ۱۲۵ مسئلہ اجزاء متناسب کا

کے زاویے پرستے سے سب تمام کہنتی عدد دفعہ ۱۸۴ کی طرح عمل کرنے سے زاویاں متصلہ کے جو اہم ہوں  
کا تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتا اور جب زاویے پہلے ہوں تو وہ بقاعدہ ہوتا ہے  
(۱۸۸) بالعموم یہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کا ماس میں جو تغیر ہوتا ہے وہ تقریباً متناسب ایک تبدیلی کے ہوتا ہے

$$\frac{\text{مس (بر + ہه) - مس بر} = \text{مس (بر + ہه) - مس بر}}{\text{مس (بر + ہه) - مس بر}} = \frac{\text{مس (بر + ہه) - مس بر}}{\text{مس (بر + ہه) - مس بر}}$$

اب فرض کرو کہ ہا چھوٹا ہو کر ہه کی جگہ پر ہه رہے کہہ سگین  
اور بر تقریباً برابر کیے نہیں ہے اسلئے مس بر ہم ہه کو ساقط کر سکتے ہیں تو  
مس (بر + ہه) - مس بر = مس بر = مس بر = مس بر  
اور ہه کے علامت بدلنے سے

$$\text{مس (بر - ہه) - مس بر} = \text{مس بر} = \text{مس بر} = \text{مس بر}$$

اسے دعویٰ ثابت ہے  
(۱۸۹) دفعہ گذشتہ کے نتیجہ سے ہم وہی قاعدہ استخراج کر سکتے ہیں جو دفعہ ۱۸۸ میں جبکہ اسلئے  
استخراج کیا تھا اب یہ تحقیق کرتے ہیں کہ دفعہ گذشتہ کی تقریبی صورت قانونی کے استعمال  
غلطی کس قدر ہوتی ہے ہکو معلوم ہے کہ

$$\text{مس (بر - ہه) - مس بر} = \text{مس بر} = \text{مس بر} = \text{مس بر}$$

اب اگر اول رقم مس ہه قطار کے سین اور باقی سلسلہ کے ارقام کو مس ہه قطار مس بر  
سے ساقط کریں تو تقریباً ہه (۱ + مس بر) مس بر حاصل ہوگا اب ہه پاس جدول اصلی  
صیون کی ہے اور اوہیں ہر دقیقہ کا ماس لکھا ہوا ہے اور ہکو اون زاویوں کے ماس دریافت  
کرتے ہیں جو جدولی زاویوں کے صحیح میں واقع ہوں اور ہه کی سب سے بڑی قیمت یہ ہے

کہ وہ ایک دقیقہ کے زاویہ کا مقیاس قوسی ہو یعنی  $40 \times 180$  کہ یعنی ۳۰۰۰ ی  
تقریباً ہوا سے معلوم ہوا کہ اس سے بڑی غلطی کی مقدار چھوٹی (۳۰۰۰ ی) (۱۰۰ ی) (۱۰۰ ی)  
سے نہ ہوگی اور اس سے اگر بڑا نہ ہوگا سے نہ ہوگا تو اس میں مرتبہ میں اعشاریہ کے غلطی واقع ہوگی  
اور اگر ہماری پاس جدول ایسی ہو کہ ہر ایک دس ثانیہ کا ماس اوس میں لکھا ہو تو اس سے

بڑی قیمت حصہ کی یہ ہوگی کہ وہ مقیاس قوس دس ثانیوں کا ہو یعنی  $40 \times 180$  کہ  
یعنی ۵۰۰۰ ی تقریباً اس صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مرتبہ میں ہی غلطی اور حالت  
میں نہیں پڑے گی کہ اس بڑا نہ ہو کہ اس کا ماس ۴ سے بڑا ہو جدول سے معلوم ہوتا ہے

کہ مس ۸۰ کا کچھ ہی کم ۶ سے ہوتا ہے  
(۴۰) چونکہ مس (بر + حصہ) - مس بر = حصہ قطاً بر تقریباً اور قطاً بر کہی ہو یا واضح  
نہیں ہوتا اس لئے ماس متصلہ کی تفاوت ہمیشہ قابل لحاظ کے ہوتی ہیں اور کلی فرق ایسی ہوتی  
نہیں ہوتے کہ ان کو محسوب نہ کریں مگر ہر دفعہ بالامین ثابت کیا جائے کہ جب زاویہ تقریباً  
برابر قانون کے ہوتے ہیں تو تفاوت اون کے بے قاعدہ ہوتے ہیں  
ہم نے ثابت کیا ہے (۱۹۱)

مس (بر + حصہ) - مس بر = حصہ قطاً بر تقریباً

بر کی جگہ پر - بر رکھو تو

مس (کے - بر + حصہ) - مس (کے - بر) = حصہ قطاً (کے - بر)

یعنی مم (بر - حصہ) - مم بر = حصہ مم بر

علامت حصہ کی بدل دو تو

مم (بر + حصہ) - مم بر = حصہ مم بر

یہ دعویٰ اور طرح سے ہی ثابت ہو سکتا ہے جس کو چھوٹے تعلق دفعہ بالا نہ ہو گا اب ہم اس کو  
لکھتے ہیں

مسئلہ اخراجات و مناسک

ہم کو معلوم ہے کہ ہم (برہم) - ہم ہر = ہم (برہم) - جب (برہم) - جب ہر

$$= \frac{\text{جیب (بر - ص) حابر}}{\text{جیب (بر - ص) حابر}} = \frac{\text{جیب (بر - ص) حابر}}{\text{جیب (بر - ص) حابر}}$$

اب فرض کرو کہ وہ ایسا چھوٹا ہی کہ اس سے کسی جگہ سے کہہ سکتے ہیں اور یہ ایسا چھوٹا نہیں کہ

موم (بر - هه) - موم بر =  $\frac{100}{100} = 1$  موم ۲ بر

محم (بر + هه) - مم بر = - هه مم بر

اسے دعویٰ ثابت ہے

اسے دعویٰ ثابت ہی  
(۱۹) بالعموم ثابت کرو کسی زاویہ قاطع الزاویہ میں تغیر ہو گا وہ متناسب زاویہ کے تبدیل کے ہو گا

$$\text{مس (بر + هه)} - \text{قطر} = \frac{\text{جم (بر + هه)}}{\frac{1}{\text{جم بر}}} - \frac{1}{\text{جم (بر + هه)}}$$
$$\frac{\text{خم ز} - \text{خم (ر + ه)} = \text{ح ه ح بر} + (\text{ا - ح ه ه}) \text{ خم ر}}{\text{خم ر ح (ر + ه)} = \text{خم ا ر (ح ه - ح ه ح ر)}}$$

اب فرض کرو کہ وہ ایسا جو نامی کہ ہم وہ نامی حکامہ ہر جہہ کہ ہم کہیں ہن اور نہ تو بہت

چھوٹے اور بڑے تقریباً مائوسی گیم کے لیے اسٹیم مس برس ۷۰ اور م برس ۸۰  
کو سوا کر سکتے ہیں۔ پس تقریباً یہ کچھ حاصل ہوگا کہ

$$\text{قط (بر + ہه) - قط بر = } \frac{\text{ہه جب بر}}{\text{جم بر}} = \text{ہه جب بر قط بر}$$

ہه کی حالت بدلنے سے

$$\text{قط (بر - ہه) - قط بر = - ہه جب بر قط بر}$$

اسے دعویٰ ثابت ہے

(۱۹۴) یعنی ثابت کیا ہے کہ

$$\text{قط (بر + ہه) - قط بر = ہه جب بر قط بر}$$

بر کی جگہ کچھ - بر رکھو تو

$$\text{قط (کچھ - بر + ہه) - قط (کچھ - بر) = ہه جب (کچھ - بر) قط (کچھ - بر)}$$

$$\text{یعنی قم (بر - ہه) - قم بر = - ہه جم بر قم بر}$$

اب ہم اسکو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ او سکو کچھ تعلق دفعہ گذشتہ سے نہوگا

(۱۹۵) دفعہ ۱۹ میں جس طرح تحقیقات ہوئی تھی اسی طرح تحقیقات کر کے ہم جان سکتے ہیں

دواویہ کے دفعوں کے صورت قانونی کے استعمال سے کس قدر غلطی ہوتی ہے اس تحقیقات کے

یہ معلوم ہوگا کہ جب زاویے بہت چھوٹے ہوں تو متصل قاطع الزاویوں کے تفاوت بقاعدہ

ہوتے ہیں اور قابل لحاظ کے نہیں ہوتے اور جب زاویے قریب قائموں کے ہوتے ہیں تو

تفاوت متصل قاطع الزاویوں کے بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے بہت چھوٹے ہوتے ہیں

تو تفاوت متصل کے قاطع التمام کے بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے تقریباً برابر قائمہ کے

ہوتے ہیں تو تفاوت متصل کے قاطع التمام کے بقاعدہ ہوتے ہیں اور قابل لحاظ کے نہیں ہوتے

اب ہم یہ بیان کرتے ہیں کہ اجزاء متناسب کا اصول لوکارشی علم مثلثی حملوں میں کہاں تک

چل سکتا ہے

(۱۹۶) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کی جیب لوکارشم جدولی میں جو تغیر ہوگا وہ تقریباً

متناسب زاویہ کے تبدل کے ہوگا

ہم کو معلوم ہو کہ جب (بر + ہ) = جب بر + ہ جم بر کے تقریباً

اسی واسطے جب (بر + ہ) = ۱ + ہ مم بر

اسی واسطے لوک جب (بر + ہ) - لوک جب بر = لوک جب (بر + ہ) = لوک (۱ + ہ مم بر)

اور لوک (۱ + ہ مم بر) = لب ہ مم بر تقریباً بموجب دفعہ (۱۲۸) کے اس میں لب  
قابل لوکارشی ہی پس تقریباً

لوک جب (بر - ہ) - لوک جب بر = لب ہ مم بر

اب فرض کرو کہ جدول لوکارشم کو ل تعبیر کرتا ہو تو یہ حال ہوگا کہ

ل جب (بر + ہ) = ۱۰ + لوک جب (بر + ہ)

ل جب بر = ۱۰ + لوک جب بر

اسی واسطے ل جب (بر ± ہ) - ل جب بر = ± لب ہ مم بر

اسے دعویٰ ثابت ہے

(۱۹۷) اب ہم ثابت کریں گے کہ یہی اصول اجزاء متناسب کا تمام علم شلتی جدول کے لوکارشم جدولی کے  
متصرف ہو اور یہ بتلائیں گے کہ ان تقریبی صورت قانونیہ کے کام لینے سے غلطی کس قدر واقع ہوگی  
(۱۹۸) ہم نے ثابت کیا ہو کہ

ل جب (بر + ہ) - ل جب بر = لب ہ مم بر تقریباً

بر کی جگہ کہے - بر رکھو تو

ل جب (کہ - بر + ہ) - ل جب (کہ - بر) = لب ہ جم (کہ - بر)

یعنی ل جم (بر - ہ) - ل جم بر = لب ہ مم بر

اور ہ کی علامت بدلنے سے

ل جم (بر + ہ) - ل جم بر = لب ہ مم بر

اسے زاویوں کے جواب تمام کے لوکارشم جدولی میں اصول مذکور ثابت ہوا

(۱۹۹) پہنچنے ثابت کیا ہے کہ تقریباً

لوک جب (بر + ہھ) - لوک جب بر = لب ہھ مم بر  
 اور لوک جم (بر + ہھ) - لوک جم بر = لب ہھ مس بر

اور تفریق کرنے سے

لوک جب (بر + ہھ) - لوک جم (بر + ہھ) - [لوک جب بر - لوک جم بر] =

لب ہھ (مم بر + مس بر)

یعنی لوک مس (بر + ہھ) - لوک مس بر =  $\frac{لب\ ہھ}{حب\ ۲\ بر}$ اسی واسطے ل (س (بر + ہھ) - ل مس بر =  $\frac{لب\ ہھ}{حب\ ۲\ بر}$ 

اور ہھ کی علامت بدلنے سے

ل مس (بر - ہھ) - ل س بر =  $-\frac{لب\ ہھ}{حب\ ۲\ بر}$ 

اسے زاویوں کے تماس کے لوکارٹم جدولی میں اصول مذکور ثابت ہوا

اور بر کی جگہ پر مم - بر کو لکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

ل مم (بر ± ہھ) - ل مم بر =  $\pm \frac{لب\ ہھ}{حب\ ۲\ بر}$ 

اسے زاویوں کے تماس التماس کے لوکارٹم جدولی میں اصول مذکور ثابت ہوا

(۲۰۰) پہنچنے ثابت کیا ہے کہ

لوک جب (بر + ہھ) - لوک جب بر = لب ہھ مم بر تقریباً

اسی واسطے لوک جب (بر + ہھ) - لوک جب بر = لب ہھ مم بر

یعنی لوک قم (بر + ہھ) - لوک قم بر = لب ہھ مم بر

اسی واسطے ل قم (بر + ہھ) - ل قم بر = لب ہھ مم بر

اور ہھ کی علامت بدلنے سے

ل قم (بر - ہھ) - ل قم بر = لب ہھ مم بر

باب دوازدهم ۱۳۱ مسئلہ اجزاء متناسک

اسے اصول مذکور قاطع التمام کی صورت میں ثابت ہوتا ہے اور بر کی جگہ کہے۔ بر کہنے سے

ل قط (بر + ہ) - ل قط بر = ل ہ مس بر

حاصل ہوتا ہے اور اسے اصول مذکور قاطع الزاویہ کی صورت میں ثابت ہوتا ہے

(۲۰۱) دفعات ۱۹۶ - ۲۰۰ کے نتائج سے وہ قاعدہ ثابت ہوتے ہیں جنکی مثالیں دفعات

۱۷۸ - ۱۷۹ میں لکھی ہیں۔ ہم نے ان کو کارثی جیب کے لوکارثی جملہ سے استنباط کر کے لکھے ہیں

اسی طرح اس تحقیقات کے کرنے میں کہ غلطی کس قدر ہوتی ہے جب کی لوکارثی جملہ کی مقدار غلط درج ہو

اور لوکارثی جدول کی غلطیوں کی مقدار دریافت کر سکے یہ تقریبی صورت قانونی اور جدول کی اس طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے کہ لوکار

کچھ واسطہ صورت قانونی جیب سے نہ تو متبادل لوکارثم جیب اور لوکارثم ماس کی صورت کو ہم

ثابت بھی کرتے ہیں

(۲۰۲) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کی جیب التمام کے لوکارثم جدولی میں جو تغیر ہو وہ تغیر نسبتاً

اوس زاویہ کے تبدیل کے ہوتا ہے

ہم کو معلوم ہے کہ جم (بر - ہ) = جم بر + ہ جب بر تقریباً

اسی واسطے آسم (بر - ہ) = ۱ + ہ مس بر

اسی واسطے لوک جم (بر - ہ) - لوک جم بر = لوک جم (بر - ہ) = لوک (۱ + ہ مس بر)

اور لوک جم (بر - ہ) - لوک جم بر = ل ہ مس بر تقریباً

اسی واسطے ل جم (بر - ہ) - ل جم بر = ل ہ مس بر

اور ہ کے علامت بدلنے سے

ل جم (بر + ہ) - ل جم بر = ل ہ مس بر

(۲۰۳) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کے ماس کی لوکارثم جدولی میں جو تغیر ہو وہ تغیر

تناسب اوس زاویہ کے تبدیل کے ہوتا ہے

ہم کو معلوم ہے کہ مس (بر + ہ) = مس بر + ہ قط تقریباً



اسی واسطے  $\frac{مس (بر + هه) = 1 + هه قلم بر}{مس بر} = 1 + 2 هه قلم بر$   
 اسی واسطے  $\frac{لوک مس (بر + هه) = لوک مس بر}{مس بر} = لوک (1 + 2 هه قلم بر)$   
 $2 لب هه قلم بر تقریباً =$   
 اسی واسطے  $\frac{ل مس (بر + هه) = ل مس بر}{مس بر} = 2 لب هه قلم بر$   
 هه کی علامت بدلنے سے

$\frac{ل مس (بر - هه) = ل مس بر}{مس بر} = 2 لب هه قلم بر$   
 (۲۰۸) اس تقریری صورت قانونیہ کے استعمال سے جس قدر غلطی ہوتی ہے اب ہم اس کا بیان کرتے ہیں  
 جب  $(بر + هه) = ل جب بر = لب هه مم بر$   
 اس صورت کے حاصل کرنے کے واسطے ہم نے لوک  $(1 + هه جم بر)$  کی بجائے لب هه مم بر  
 لکھا ہے اور اس لکھنے میں هه مم بر کے مربع اور مربع سے زیادہ قواؤں پر کچھ لحاظ نہیں کیا اور نکل چھوڑ دیا  
 لیکن جب یہ نہایت چھوٹا ہو تو ہم یہ نہایت بڑا ہوگا اسلئے هه مم بر اس قابل نہ ہوگا کہ اس پر  
 کچھ لحاظ نہ کیا جائے اسلئے اس صورت کی تحقیقات اور زیادہ ہونی چاہئے  
 دفعہ ۱۸ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ

جب  $(بر + هه) = جب بر = جب هه جم بر (1 - مس بر مس)$   
 فرض کرو کہ هه لب چھوٹا ہو کہ هه کو بجای جب هه کے اور هه کو بجای مس هه کے لکھیں  
 جب  $(بر + هه) = جب بر = هه جم بر - هه جب بر کے تقریباً حاصل ہوگا$   
 اسی واسطے  $\frac{جب (بر + هه) = 1 + هه مم بر - هه}{مس بر} =$   
 اسی واسطے  $\frac{لوک جب (بر + هه) = لوک (1 + هه مم بر - هه)}{مس بر} =$   
 $لب (هه مم بر - هه) - لب (هه مم بر - هه) + 00$  دفعہ ۱۷۵  
 $= لب هه مم بر - لب (1 + مم بر) + 00$   
 اب اگر هه کی قواؤں کو جو هه سے بڑے ہوں ساقط کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ

لوک جب (ھ + بر) - لوک جب بر = لب ھ مم بر - لب ھ مم بر  
 اب اگر سمار پاس جدول ایسی ہے کہ اوسمیں ہر دس ثانیہ کے چلے لکھے ہیں تو ھ کی سب سے بڑی  
 قیمت ۱۰ ثانیہ کی مقیاس قوسی ہوگی یعنی قریب ۰.۰۰۰۵ اور لب =  $\frac{1}{10}$  تقریباً  
 پس سب سے بڑی غلطی جو واقع ہو سکتی ہے  $\frac{1}{10}$  قوس سے ہوگی یہ غلطی بیشک سات مرتبہ کی غلطی  
 تک حساب کر نہیں قابل لحاظ کے ہوگی اگر یہ چھوٹا ۰ سے ہو کیونکہ جدول کے معلوم ہوتا ہے  
 کہ جب ۰ کی  $\frac{1}{10}$  سے چھوٹی ہوتی ہے اسلئے قاطع التمام ۰ کا ۱۰ سے بڑا ہوگا

پس یہ معلوم ہوگا کہ جب زاویے چھوٹے ہوں تو متصل کے لوکارشی جب میں تفاوت بقاعدہ  
 ہوتے ہیں جبکہ بزرگ زاویہ قائمہ کے نہایت قریب ہو تو ہم سر نہایت چھوٹا ہوگا اور قوس بہت چھوٹا  
 ہوگا پس اوپر کی صورت قانونی لوک جب (بر + ھ) - لوک جب بر سے ثابت ہوتا ہے  
 کہ جب زاویے برابر قانون کے ہوں تو متصل کے لوکارشی جو سب کے تفاوت قابل لحاظ کے  
 نہیں ہوتے ہیں اور بقاعدہ ہی ہوتے ہیں

ان نتائج سے ہم اور علم مثلثی جدول کے لوکارشوں کے واسطے نتائج استنباط کر سکتے ہیں  
 بیان دفعہ ۲۰۶ میں کیا گیا ہے

(۲۰۵) دفعہ گذشتہ سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ جب ایک زاویہ چھوٹا ہو تو نہ اسکی  
 لوکارشی جب اور نہ لوکارشی جیب سے وہ زاویہ جدول لوکارشی مروج کے استعانت سے  
 دریافت ہو سکتے ہیں

کیونکہ متصل کے لوکارشی جب کی تفاوت کو قابل لحاظ کے ہوتے ہیں مگر وہ بقاعدہ ہوتی ہیں  
 اس وقت کے دور کرنے کے واسطے تین ترکیبیں ہیں

پہلی ترکیب رجب کے چند اول درجوں کے زاویوں کی ہر ثانیہ کی  
 جب جدول میں لکھی ہوئی ہوتی ہے اس صورت میں بڑی سے بڑی قیمت ھ کی تفصیل  
 قوسی ایک ثانیہ کا ہوگا اور  $\frac{1}{10}$  قوس یا قدر چھوٹا ہو جائیگا کہ قابل لحاظ کے ہرگز نہ ہوگا

دوسری ترکیب اسکو ڈیمبر کی بھی ترکیب کہتے ہیں ایک جدول ایسی بنی ہوئی ہوتی ہے کہ اس میں قیمت لوگ جبریر + ل جب آ کی ہر تالیف کے واسطے راجع کے چند درجوں کے لئے لکھی ہوئی ہوتی ہے

فرض کر لے کہ برقیاس قوسی ن ثانیہ کے زاویہ کا ہو تو

بر = ن جب آ تقریباً بموجب دفعہ ۱۲۳ کے

اسیوٹے لوگ جبریر = لوگ جبریر = لوگ جبریر - لوگ ن - لوگ جبریر آ  
جب آ = ل جب ن - لوگ ن - ل جب آ

اسیوٹے لوگ ن = ل جب ن - (لوگ جبریر + ل جب آ)

اگر زاویہ معلوم ہو تو جدول سے قیمت لوگ جبریر + ل جب آ اور لوگ ن کی اعداد کی لوکارثم جدولی سے دریافت ہو سکتی ہے پس اس صورت قانونی سے ل جب ن دریافت ہو سکتی ہے

اگر قیمت ل جب ن کی معلوم ہو اور ن دریافت کرنا ہو تو عمل اس طرح کرنا چاہیے جو تکمل ل جب ن کی معلوم ہونے سے زاویہ کی قیمت تقریبی دریافت ہو سکتی ہے اور جب زاویہ معلوم ہو جا تو جدول سے قیمت لوگ جبریر + ل جب آ اور اس صورت جبریر سے ہم کو لوگ ن کی دریافت ہوگی اور جب لوگ ن معلوم ہو گئی تو معمولی جدول لوکارثم سے ن دریافت ہو سکتا ہے اس عمل میں ایک غلطی ہم پہہ کرتے ہیں کہ جبریر کی اصلی قیمت کی جگہ اسکی تقریبی قیمت کام میں لائے ہیں لیکن باب نہم سے ثابت ہو چکا ہے کہ اور آئندہ ہم اسکو اور طر سہرغ ثابت کرینگے کہ جب جبریر نا ہو تو جبریر نہایت قریب قریب برابر ہے - چنے کے ہوتا ہے اس واسطے چھوٹی سی غلطی برکی ہماری حساب میں کوئی غلطی قابل لحاظ کے نہیں پیدا کرے گی کیونکہ لوگ جبریر نسبت بر

کے بہت ہی کم جلد تبدیل ہوگا

تیسری ترکیب اس ترکیب کا نام میکس کی لائن کی ترکیب یا تہ ترکیب اس وقت چلی

جدولیں ایسی موجود ہوں جسے کہ اوپر کی ترکیب میں بیان ہو میں  
باب نہم سے یہ نتیجہ نکل سکتا ہے کہ جس وقت بر بہت چھوٹا ہو تو  
جب بر = بر -  $\frac{1}{4}$  = حجم بر = ۱ -  $\frac{1}{4}$  (اس نتیجہ کو آگے بھی بہت تفصیل کے ساتھ ثابت کرینگے)  
یہ جب بر = ۱ -  $\frac{1}{4}$  = (۱ -  $\frac{1}{4}$ ) کے قریباً

$$= (\text{جم بر}) \text{ تقریباً}$$

اس صورت میں لوگ جب بر کی بر کے معلوم ہونے سے ایک ہی دفعہ میں معلوم ہو جائیگی اور اگر  
لوگ جب معلوم ہو تو ہم قیمت بر کی تقریباً دریافت کر سکتے ہیں اور پھر اسے لوگ جم بر کی تقریباً  
دریافت کر سکتے ہیں تو معلوم ہوگا

$$\text{لوگ بر} = \text{لوگ جب بر} - \frac{1}{4} \text{ لوگ جم بر}$$

اب یہاں چونکہ جم بر نسبت بر کے بہت ہی کم جلد بدلتی ہے اسلئے لوگ جم بر کی تقریباً قیمت  
بجائی اصلی قیمت کے کام میں لگنے سے کوئی غلطی قابل لحاظ کے نہیں پیدا ہوگی  
اور اسی قیل کی صورت قانونی چھوٹے زاویہ کے تماس کے واسطے بھی حاصل ہو سکتی ہے  
دلیل مس بر =  $\frac{1}{4}$  = (بر -  $\frac{1}{4}$ ) (۱ -  $\frac{1}{4}$ ) تقریباً

$$\text{اسیوٹے مس بر} = (۱ - \frac{1}{4}) (1 + \frac{1}{4})$$

$$= 1 + \frac{1}{16} = (1 - \frac{1}{4}) \text{ ح } \frac{1}{4} \text{ تقریباً}$$

اسیوٹے لوگ مس بر = لوگ بر -  $\frac{1}{16}$  لوگ جم بر تقریباً  
(۲۰۶) اس باب میں جو نتائج بعد تحقیقات کے لکھے گئے ہیں ان کو سیکو بیان ایک جگہ لکھتے ہیں  
تمام علم مثلثی جملوں میں خواہ وہ اصلی ہوں یا یوکاریٹی ہوں باستثناء خاص صورتوں کے اصول اجزاء  
فناسی کا استعمال ہو سکتا ہے اور یہ خاص صورتیں اس وقت واقع ہوتی ہیں کہ زاویے  
چھوٹے ہوں یا تقریباً برابر قائمہ کے ہوں ان مثلثی صورتوں میں متصل کے جملوں کا تفاوت  
بعض اوقات صرف بقاعدہ ہونا ہے اور بعض اوقات قابل لحاظ کے نہیں ہوتا یعنی صحیح ہوتا ہے

اور اس وقت وہ بقاعدہ بھی ہوتا ہے  
اصلی جملوں میں تو یہ صورتیں مستثنیٰ ہیں کہ حسب وقت زاویہ تقریباً برابر قائموں کے ہوں تو جب میں  
تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتے یعنی سچ ہوتے ہیں اور جس وقت زاویے چھوٹے ہوتے ہیں  
اس وقت جب التمام میں تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتے اور جس وقت زاویے تقریباً برابر  
قائم کے ہوتے ہیں تو تفاوت بقاعدہ ہوتے ہیں اور جس وقت زاویے چھوٹے ہوتے ہیں  
ماس التمام میں تفاوت بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے چھوٹے ہوتے ہیں تو قاطع الزاویہ  
میں تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتے اور جب زاویے قائم کے قریب ہوتے ہیں تو وہ  
بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے چھوٹے ہوتے ہیں تو قاطع التمام میں تفاوت بقاعدہ  
ہوتے ہیں اور جب زاویے قریب قائم کے ہوتے ہیں تو تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتے  
سر کو کارشی جملہ میں اس حالت میں کہ زاویے چھوٹے ہوں یا برابر قائموں کے ہوں اصول اجزاء  
متناسک کا نہیں چل سکتا جب زاویے چھوٹے ہوں تو لوگ جب اور لوگ قاطع التمام میں  
تفاوت بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے برابر قائموں کے ہوں تو تفاوت قابل لحاظ کے  
نہیں ہوتے اور جب زاویے چھوٹے ہوتے ہیں تو لوگ جب التمام اور لوگ قاطع الزاویہ میں  
تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتے اور جب زاویے برابر قائموں کے ہوتے ہیں تو تفاوت بقاعدہ  
ہوتے ہیں اور جب زاویے چھوٹے یا تقریباً برابر قائموں کے ہوتے ہیں تو لوگ ماس التمام اور لوگ  
ماس التمام میں تفاوت بقاعدہ ہوتے ہیں

(۲۰۷) لو کارشی جملوں کے استعمال کے لئے یہ ضرور ہے کہ ان صورتوں سے حتی الامکان  
اجزاء کرین جنہیں اصول اجزاء متناسک استعمال نہ ہو سکتا ہو اسکے یہ معنی ہیں کہ ہم جدو کو  
استعمال میں حتی الوسع یہہہ کوشش کریں کہ جملوں کے تفاوت مطابق زاویوں کے چھوٹے تفاوت  
کے قابل لحاظ کے اور بقاعدہ ہوں اگر تفاوت جملوں کے قابل لحاظ کے خاص مراتب  
اشاریہ تک نہ ہوں تو ہم کسی ترکیب سے قیمت جملہ کی کسی زاویہ یا پٹنی کی نہیں دریافت

مسئلہ اجزاء متناسب

۱۳۷

باب دوم در علموں میں جو ایک جیب تک خاص ہوتا ہے اسے قید لگی ہوئی اگر تفاوت جملہ کر نیکی اور عمل معلوم نہیں کر لے جائے جب تک خاص ہوتا ہے اسے قید لگی ہوئی اگر تفاوت جملہ کے بمقابلہ میں تو ہم کسی ترکیب سے راویہ یا مبنی کی قیمت نہیں دریافت کر سکتے اور نہ عمل معلوم ہوسکتا ہے اصول اجزاء متناسب کے کر سکتے ہیں گو وہی رقیعین رہے دین جھکول

تقریبی قیمت میں جوڑ دیا تھا

(۲۰۸) اگر سکو ایک زاویہ ای جیب اور جیب التمام سے دریافت کرنا ہو تو ہم متناسب ہوگا کہ اگر ہم سے کم ہو تو اصلی جیب کو کام میں لائیں اور اگر زاویہ ہم سے بڑا ہو تو جیب التمام کو کام میں لائیں اسطرح کہ متصل جیبوں کے تفاوت تقریباً ایسی ہی بدلتی ہیں جیسے کہ جیب التمام زاویہ کی اور متصل جیب التمام کے تفاوت تقریباً ایسی ہی بدلتی ہیں جیسے کہ جیب زاویہ کی یہ تفاوت متصل کے جیب کے بڑی نسبت تفاوت متصل کے جیب التمام کے ہوتے ہیں اگر زاویے جوڑے ہوں اور جوڑے ہوتے ہیں اگر زاویے ہٹائے ہوں اور ہٹائے ہوتے ہیں اور یہی کیفیت جیب اور جیب التمام کے کو کارٹون کی ہے

(۲۰۹) اگر طالب علم اصول علم خریات سے واقف ہوگا تو اسکو یہ بات معلوم ہوگی کہ اس کے ساتھ باجے نتائج میل صاحب کے ضابطہ سے استخراج ہو سکتی ہیں اور اس سے یہ نتائج خوب یاد ہو سکتے ہیں اور جب اوکو جائزین حاصل کر سکتے ہیں مثلاً اصلی جیب پر خیال کر دو تو جیب ضابطہ میل کے

جیب (بر + ہ) = جیب بر + ہ جیب بر - ہ جیب (بر - ہ) (بر + لہ)

اس میں را ایک کسر واجب ہے اس صورت قانونی سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر ہم

جیب (بر + ہ) = جیب بر + ہ جیب بر - ہ جیب (بر - ہ)

تو غلطی کم ہے سے واقع ہوگی اور علاوہ برین ہم یہ دیکھتے ہیں کہ جیب چھوٹا ہوتا تو رقم جیب (بر + لہ) بمقابلہ ہم بر کے نہایت ہی چھوٹی ہے اور بر خلاف اسکے جو قوت برساوی کہے کے تقریباً ہو تو اصول اجزاء متناسب کا غیر متناسب ہو جاتا ہے کیونکہ جیب (بر + لہ) بمقابلہ ہم بر کے قابل لحاظ کے ہوتا ہے

ایسا ج نہیں ہو جاتا جیسا کہ پہلی صورت میں تھا  
اب پھر توجیب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے ہم کو یہ حاصل ہے کہ  
لوک جب (بر + ہد) = لوک جب بر + لب ہد مم بر۔ لب ہد قم (بر + لہد)  
اس میں لب قالب کو کارثی ہے اور لڑ کوئی کارثی ہے اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ  
اصول اجزاء متناسب کا بالعموم کو کارثی جب میں استعمال ہو سکتا ہے مگر جب زاویے چوڑے ہوں  
تو تفاوت متصل کے کو کارثی جو یک بقاعدہ ہوتے ہیں اور جب زاویے تقریباً برابر قائم ہوں تو  
تفاوت بقاعدہ اور جمع ہونگے

(۲۱۰) اصول اجزاء متناسب کے سب سے جو غلطیاں واقع ہوتی ہیں ان کا تخمینہ یا حساب کے  
ضابطہ کے استعمال سے بخوبی ہو جاتا ہے مثلاً کو کارثی جب تو تو کم معلوم ہو کہ  
لوک جب (بر + ہد) = لوک جب بر + لب ہد مم (بر + لہد)  
اس میں بعض کمزوری تقریبی قیمت کے دریافت کرین میں مم بر کو بجای مم (بر + لہد)  
کے رکھا ہے اور اسے قیمت لوک جب (بر + ہد) - لوک جب بر کی با میں لب ہد مم بر  
اور لب ہد مم (بر + ہد) کے واقع ہے پس غلطی کم نسبت  
لب ہد [مم بر - مم (بر + ہد)] کے واقع ہوتی ہے

### امثلہ متفرقہ

(۱) ایک قائم الزاویہ کے زاویوں میں سے ایک زاویہ عمود او کے قطر پر نکالا گیا ہے اور جس نقطہ پر یہ  
قطر کو قطع کرتا ہے اس نقطہ عمود اول اضلاع پر نکالی گئی ہیں جو متقابل زاویہ کے محیط ہیں  
تو اگر ان آخر عمودوں کے طول ع اور ع ہوں اور ح طول قطر کا ہو تو ثابت کرو

$$ح^2 = ع^2 + ع^2$$

(۲) اگر دو دائرے جن کے قطر اور ص ہیں ایک دوسرے کو مس کریں اور ان دائروں کے  
دو مماس مشترک کا درمیانی زاویہ برہو تو ثابت کرو کہ





اشلہ تفرقہ

۱۴۰

باب دوازدهم

لاجم بر + جیب بر = ط اور لاجم (بر + ۲ سر) بر - جیب (بر + ۲ سر) = ط  
ص جیب (بر + سر) = ط جیب سر

(۱۳) لا اور کو ان مساواتوں سے دور کرو

مس لا + مس ۲ = ط اور مم لا + مم ۲ = ص لا + ۲ = ح

(۱۴) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

$\frac{لا}{ط} = \frac{قطا بر - جم بر}{قطا بر + جم بر} = \frac{قطا بر - جم بر}{قطا بر + جم بر}$

(۱۵) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

(ط + ص) مس (بر - سر) = (ط - ص) مس (بر + سر)

جم ۲ سر + ص جم ۲ بر = ح

(۱۶)  $\frac{لا}{ط} جم بر = \frac{۲}{ط} جم بر + \frac{۲}{ص} جم بر$

اور جیب (بر + بر) = جیب (بر - بر) = جیب ۲

تو ثابت کرو کہ جیب ۲ =  $\frac{ص ۲}{ط}$

(۱۷) سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

دجم سر - لاجم سر = ط جم ۲ سر اور ۲ جیب سر + لاجم سر = ۲ ط جیب ۲ سر

اور ثابت کرو کہ (لا + ۲)  $\frac{۲}{ط}$  + (لا - ۲)  $\frac{۲}{ط}$  = ۲ ط

(۱۸) بر اور سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

جم بر = جیب ۲ سر = جم سر = جیب ۲

جم (بر - سر) = جیب ۲ جیب ۲

اور ثابت کرو کہ مس ۲ = مس ۲ + مس ۲

(۱۹) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

م = قم بر - جیب بر اور م = قطا بر - جم بر

(۲۰) ان مساواتوں میں برکودور کرو  

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{حج}}{\text{ص}} + \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$$

(۲۱) بر اور بر ان مساواتوں سے دور کرو

طج + طج = صج + طج = ص اور طس = طس

اور ثبات کرو کہ  $\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ص}}$

(۲۲) معلوم ہے کہ لا + ص = ط + ص

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{حج}}{\text{ص}} + \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$$

تو ثبات کرو کہ  $\pm \text{حج} = \text{حج} + \text{حج} = \text{حج}$

(۲۳) اگر  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$  تو ثبات کرو

جس  $\frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}} - \frac{1}{\text{ط}}$

(۲۴) اگر  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$

تو ثبات کرو کہ  $\frac{1}{\text{ط}} - \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}}$

(۲۵) معلوم ہے کہ  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$

تو ثبات کرو کہ  $\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}}$

(۲۶) اگر  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$  تو

$$\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$$

(۲۷) اگر  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$

اور  $\frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}} = \frac{\text{حج}}{\text{ط}}$

ثبات کرو کہ  $\frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}}$

(۲۸) اگر  $\frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$

تو ثبات کرو کہ  $\frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$

(۲۹) معلوم ہے کہ جب برجب مر = جب سہ جب صد اور سہ مر حم صد = حم سہ تو ثابت اگر کو

جب سے کی قیمتوں میں سے جب سے جب صد ایک قیمت ہر

(نہیں) معلوم ہے کہ جب سر = ن جب برادر سر = سر = سر بر

توں کی ایسی قسمیں محدود دریافت کرو کہ یہ دونوں ساتین ایک ہی وقت قائم رہیں

(۳) علم شائع تو اس میں سے ثابت کرو کہ اگر  $l + r + y = l + y$  تو

$$\frac{r_1}{r_1-1} \cdot \frac{r_2}{r_2-1} \cdot \frac{r_3}{r_3-1} = \frac{r_1}{r_1-1} + \frac{r_2}{r_2-1} + \frac{r_3}{r_3-1}$$

باب سیزدہم ۱۲۳  
 دوسری قیمت کے معنی بیان کرو اور اگر ایک قیمت اصل دائرہ کی نصف قطر کے برابر ہو  
 تو ثبات کرو کہ سہ = چم

## تیسرا بیان باب

ثلث کے ضلع اور اس کے زاویوں کے علم شلشی جملوں کے ارتباطات ہیں  
 (۲۱۱) ثلث کے ضلع اور اس کے زاویوں کے علم شلشی جملوں کے درمیان جو ارتباطات ہوں  
 اوپری تحقیقات کرتے ہیں اور یہہہ ارتباطات آئندہ ثلثوں کے حل کے میں بڑی کام آئیں گے  
 ثلث کے زاویوں کو حروف ل اور ب اور س سے تعبیر کریں گے اور ان کے مقابل کے ضلعوں کو  
 حروف ط اور طب و طس سے پس حروف ط اور طب و طس اعداد ہیں جنکو طول کسی بیانیہ  
 واحد کے موافق بیان کی گئی ہیں اور یہہہ بیانیہ واحد خواہ ف ہو گز ہو یا کچھ اور ہو یا نہ واحد خواہ کچھ  
 ہی مقرر کرو مگر سب ضلع کے واسطے وہ ایک ہی ہو

(۲۱۲) ثلث قائم الزاویہ میں ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے اصل ضرب و تر اور زاویہ متصل کے جیب تمام  
 فرض کرو کہ ل بس ثلث ہے جسکا س زاویہ قائم ہے تو



اس کے مطابق  $\frac{ل}{س} = \frac{ب}{س}$  اور  $\frac{ل}{ب} = \frac{س}{س}$  = چم ب  
 اس کے مطابق  $\frac{ط}{ب} = \frac{س}{ب}$  اور  $\frac{ط}{س} = \frac{ب}{ب}$  = طس چم ب  
 چونکہ چم ل = جب ب اور چم ب = جب ل تو اس مطلب کو یوں بیان کیا کرتے ہیں کہ ثلث قائم الزاویہ  
 میں ہر ایک ضلع برابر حاصل ضرب و تر اور مقابل کے زاویہ کے جیب کے ہوتا ہے  
 (۲۱۳) ثلث قائم الزاویہ میں ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب دوسرے ضلع اور اس کے  
 مقابل کے زاویہ کے ماس کے دفعہ گذشتہ کے شکل میں ہو گویا یہ معلوم ہے کہ

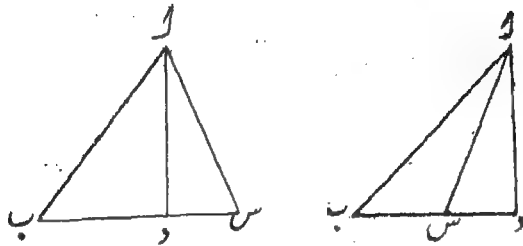
$$س ل = س ب \text{ اور } س ب = ل ب$$

$$اس کے مطابق ط ل = ط ب \text{ اور } ط ب = ط س$$

اور چونکہ چم ل = چم ب اور چم ب = چم ل تو اس مطلب کو اس طرح بیان کیا کرتے ہیں کہ

باب سیزدہم  
مثبت ۱۴۷ کے مسئلہ اور اس کے زاویوں کے مثلثی شکل کے اثبات

مثبت قائم الزاویہ میں ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے یا صاف ضرب دوسرے ضلع اور اس کے متصل کے زاویہ کے  
ماس التمام کے  
(۲۱۴) ہر مثلث میں اضلاع مناسب کے متقابل کے زاویوں کے جیب ہوتے ہیں



فرض کرو کہ اب س کوئی مثلث ہے اور اسے ا د عمود مقابل کے ضلع پر اس ضلع سے نقطہ د  
پر ملتا ہوا نکالو اور شرط ضرورت ضلع محدودہ پر یہ عمود نکالو

اگر ب اور س حاوی زاویے ہیں تو بائیں طرف کے شکل میں

$$ا د = ا ب جیب ب \text{ اور } ا د = ا س جیب س$$

$$\text{اسی واسطے } ا ب جیب ب = ا س جیب س$$

$$\frac{\text{اسی واسطے } ا ب جیب ب}{ا ب جیب ب} = \frac{ا س جیب س}{ا س جیب س}$$

اور اگر زاویہ س منفرج ہے تو دائیں طرف کے شکل میں

$$ا د = ا ب جیب ب \text{ اور } ا د = ا س جیب (۱۸۰ - س) = ا س جیب س$$

$$\text{اسی واسطے } ا ب جیب ب = ا س جیب س$$

$$\frac{\text{اسی واسطے } ا ب جیب ب}{ا ب جیب ب} = \frac{ا س جیب س}{ا س جیب س}$$

اور اگر س زاویہ قائم ہو تو دفعہ ۱۴۷ کے شکل میں

$$ا س = ا ب جیب ب$$

$$\text{اسی واسطے } \frac{ا س}{ا ب جیب ب} = \frac{ا س}{ا ب جیب ب}$$

پس ثابت ہوا کہ صورتیں تین  $\frac{ا س}{ا ب جیب ب} = \frac{ا س}{ا ب جیب ب}$

باب سیدہم ۱۲۵ مثلث کے ضلع اور اس کے زاویہ علم کی جملہ شرائط

اور علیٰ ہذا القیاس  $\frac{ط}{طب} = \frac{ج}{جطب}$  اور  $\frac{ط}{طب} = \frac{ج}{جطب}$   
اور ان نتائج کو قرینہ کے ساتھ اس طرح لکھتے ہیں

$$\frac{ط}{طب} = \frac{ج}{جطب} = \frac{ج}{جطب}$$

(۲۱۵) مثلث کے ایک زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کے ارقام میں لکھو  
فرض کرو کہ ابس ایک مثلث ہو اور س حادہ زاویہ (دفعہ گذشتہ میں بائیں طرف کی شکل) کے  
تو مجموعہ (س + اش ۲م) کے

$$اب = ب س + و س - ۲ اب س . س د$$

$$اور س د = اس جم س$$

$$اسیو ط س = ط آ + طب - ۲ ط اب جم س$$

دوم فرض کرو کہ س زاویہ منفرجہ ہی (دفعہ گذشتہ کی دائیں طرف کی شکل) کے  
تو محکم (اش ۲م) کے

$$اب = ب س + اس + ۲ اب س . س د$$

$$اور س د = اس جم (س - ۱۸۰) = - اس جم س$$

$$اسیو ط س = ط آ + طب - ۲ ط اب جم س$$

$$پس دو صورتوں میں جم س = ط آ + طب - ۲ ط اب$$

اور سوا اسکے اگر س قائم ہو تو  $ط آ + طب = ط س$  اور جم س صفر ہی ہے اس سے معلوم ہوا کہ  
جو صورت قانونی جم س کے واسطے ثابت ہوئی ہو وہ ہر حالت میں خواہ زاویہ س کچھ ہی ہو  
صحیح اور درست ہے

$$ط س + ط آ - طب$$

اور علیٰ ہذا القیاس جم  $ط آ + طب - ط س$  اور جم  $ط س + ط آ - طب$   
(۲۱۶) ہر مثلث میں ہر ایک ضلع برابر ہے اور دو حاصل ضربوں کے مجموعہ کے جواباتی  
دو ضلعوں میں سے ہر ایک ضلع کو اس زاویہ کے جیب التمام میں کہ وہ دوسرے ضلع کے

ساتھ بنائے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں  
دفعہ ۲۱۴ میں بائیں طرف کی شکل میں مجموعہ حاصل ہے کہ

$$ب س = ب د + د س = ا ب جم ب + ا س جم س$$

$$\text{یعنی طا} = ط س جم ب + ط ب جم س$$

اور دفعہ ۲۱۴ میں دائیں طرف کی شکل میں مجموعہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ب س = ب د - د س = ا ب جم ب - ا س جم س$$

$$= ا ب جم ب + ا س جم س$$

یعنی طا = ط س جم ب + ط ب جم س  
اور اس طرح سرسری صورت میں یہ حاصل ہوگا کہ

$$ط ب = ط ا جم س + ط س جم ب$$

$$\text{اور ط س} = ط ب جم ب + ط ا جم ب$$

(۲۱۷) مثلث کے نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام اور ماس کو ضلع کی رقوم میں یا کرو  
موجب دفعہ ۲۱۵ کے

$$\text{جم} = ط ب + ط س - ط ا$$

$$\text{اسی طرح} ۱ - \text{جم} = ط ب - ط س - ط ا = ط ب ط س - ط ا ط س$$

$$\text{اسی طرح جیب} \frac{۱}{۲} = (ط ا + ط ب ط س) (ط ا + ط س ط ب)$$

فرض کرو کہ ۲ م = ط ا + ط ب + ط س یعنی م نصف مجموعہ ضلع مثلث کا ہو تو

$$ط ا + ط ب ط س = ط ا + ط ب + ط س - ۲ ط س = ۲ (م ط س)$$

$$\text{اور ط ا ط س} - ط ب = ط ا + ط ب ط س - ۲ ط ب = ۲ (م ط ب)$$

$$\text{اسی طرح جیب} \frac{۱}{۲} = (م ط ب) (م ط س)$$

باب سیزدہم ۱۴۷ مثلث کے ضلع اور زاویوں کے مثلثی حلقوں کے ارتباطات

$$\frac{(م - طس)(طس - م)}{طس} = ۱$$

$$\text{اور نیز } ۱ + جم = ۱ + \frac{طس + طس - طس}{طس} = \frac{(طس + طس - طس) + طس}{طس} = \frac{۲طس - طس}{طس} = \frac{طس}{طس} = ۱$$

$$\text{اسی واسطے } ۱ + جم = \frac{(طس + طس - طس)(طس + طس - طس)}{طس} = \frac{(طس + طس - طس) + طس}{طس} = \frac{۲طس - طس}{طس} = \frac{طس}{طس} = ۱$$

$$\text{اور } ۱ + جم = \frac{م(م - طس)}{طس}$$

اور جب ۱ + جم ۱ کی قیمتوں کو ہم مستند کر سکتے ہیں

$$مس = \frac{(م - طس)(طس - م)}{طس}$$

جذر علامت مثبت لکھنی چاہئے اس واسطے ۱ + جم نسبت قائم ہو جائے اور اس کی جب اور

جب التمام اور ماس سب کے سب مثبت ہیں

اور اسی اقبل کے حلقے اور نصف زاویوں کے واسطے نکلیں گے

(۲۱۸) چونکہ جب ۱ = ۲ جب ۱ + جم ۱ تو اتنے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$جب ۱ = ۲ \quad \frac{(م - طس)(طس - م)}{طس} = \frac{م(م - طس)}{طس}$$

$$= \frac{طس(طس - م)}{طس} = طس - م$$

اور جب ۱ کی قیمت بلا واسطہ جم ۱ کے قیمت کے بھی ہم دریافت کر سکتے ہیں

$$جب ۱ = ۱ - \frac{(طس + طس - طس)}{طس}$$

$$= \frac{طس + طس - طس + طس + طس - طس}{طس} = \frac{۲طس - طس}{طس} = \frac{طس}{طس} = ۱$$

$$= \frac{طس + طس - طس}{طس}$$

$$\text{اسی واسطے } ۱ = \frac{طس + طس - طس + طس + طس - طس}{طس} = \frac{۲طس - طس}{طس} = \frac{طس}{طس} = ۱$$

اگر اس جملہ کو اجزاء ضربی م اور م - طس اور م - طس میں بائیں تو اس جملہ کی پہلے جملہ کے ساتھ تطبیق ہو جائیگی



باب سیزدہم ۱۲۸ مثلث کے اضلاع اور کو زاویوں کے علم مثلثی معلوم آتا ہے

(۲۱۹) مجھے دفعات ۲۱۴ - ۲۱۵ میں بغیر شکل کی امداد کے صورت قانونیہ کو ثابت کیا ہے لیکن ہر دفعہ کے صورت قانونیہ کو تیسری دفعہ کی صورت قانونی سے مستنبط کرنا نہایت آسان ہے اب دفعہ ۲۱۶ کے موافق یہ لکھتے ہیں کہ

طا = طب جم س + طس جم ب اور طب = طس جم ا + طاجم س اور طس = طاجم ب + طب جم ا  
 اولی کو طایم ا دوم کو طب مین اور سوم کو طس مین ضرب دو اور جو سواتیج حاصل ہوں ان میں سے اول دو کو جمع کرو اور تیسری سوات کو تفریق کرو تو یہ حاصل ہو گا کہ  
 طا + طب = طس ۲ طا طب جم س

اور اس طرح دفعہ ۲۱۵ کی دو صورت قانونی مستنبط ہو سکتی ہیں اور ان نتائج سے آگے عمل اسی طرح کریں جس طرح کہ دفعات ۲۱۷ اور ۲۱۸ میں کیا تھا

جب ا = طا طس م (م - طا) (م - طب) (م - طس)  
 اور جب ب اور جب س بھی اسی جملہ کے برابر ہیں

پس  $\frac{طا}{طس} = \frac{طب}{طس} = \frac{جم س}{طس}$   
 یا دفعہ ۲۱۴ کے صورت قانونی اول قائم کریں اور ہر شکل سے اسی طرح عمل کریں کہ  
 جب ا = جب (۱۰ - ا) = جب (ب + س) = جب ب جم س + جب ب جب س

اسی طرح  
 جم س = جب ا + جب ب + جب س  
 =  $\frac{طب}{طس} جم س + \frac{طس}{طس} جم ب$   
 اسی طرح طا = طب جم س + طس جم ب

اور علیٰ ہذا القیاس دفعہ ۲۱۶ کے دو اور صورت قانونی بھی مستنبط ہو سکتی ہیں اور یہ دونوں دفعہ ۲۱۷ کی صورت قانونیہ استخراج اسی طرح ہو سکتی ہیں جس طرح اس دفعہ کے اول میں لکھا ہے

(۲۲۰) جب ا اور جم ا کے اندر دفعہ ۲۱۷ میں جو علامت مثبتہ واقع ہوئی ہے

باب سینزوم ۱۲۹ مثلث اضلاع اور زاویوں کے مثلثی جملوں اور باطنی

اوسکی وجہ اور سیطر بیان ہو سکتی ہے جس طرح پہلے اوسکا بیان اپنے موقع پر کیا گیا ہے  
اول ہم جملہ جسم کے واسطے دریافت کرتے ہیں اور پھر اوس سے جب کہ اور ہم کے  
جملے استنباط کرتے ہیں اور دفعہ ۹۶ میں ثابت ہوا کہ ایسی حالت میں دو قیمتیں نکلا کرتے ہیں  
جنہیں سوا علامت کے اختلاف مقدار مطلوب میں نہیں ہوتا

(۲۱) چونکہ دفعہ ۲۱ کے صور قانونیہ اچھی طرح ثابت ہوئیں ہیں اسلئے اوس سے اصلی قیمت  
جب کہ اور ہم کے اور جس کے اور جس کی دریافت ہوتی ہے بشرطیکہ مثلث اصل میں موجود  
اور یہ بات مثلث کے ایک خواص سے آسانی دریافت ہو سکتی ہے

مثلاً صورت قانونی

$$\text{جہاں } \frac{1}{2} = \frac{(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})}{\text{طس}}$$

اب جب کہ کی ممکن قیمت ہونی چاہیے کہ بائیں طرف کا جملہ مثبت ہو اور واہ سے کم ہو اوسکا  
مثبت ہونا تو ظاہر ہے کہ مثلث کے دو ضلع ملکر بڑے تیسرے ضلع سے ہوتے ہیں اسلئے  
طا + طب - طس مثبت اور طا + طس - طب مثبت ہے اور شمار کنندہ

طا - (طس - طب) اس نام سے کم ہے بشرطیکہ طا چھوٹا (طس - طب) +  
+ ۴ طب طس یعنی طا چھوٹا (طس + طس) سے ہو اور یہ ظاہر کم معلوم ہوتا ہے

امثلہ متفرقہ

(۱) ایک مثلث کے اضلاع لا + لا + لا اور لا - لا - لا ہیں تو ثابت  
اوسمیں سے بڑا زاویہ ۲۰۰ کا ہے

(۲) اگر جسم ب = جس تو ثابت کرو کہ مثلث متساوی الساقین ہے

(۳) مثلث قائم الزاویہ میں جسکا زاویہ ۹۰ قائمہ ہو ثابت کرو کہ

$$\text{م } \frac{1}{2} = \frac{\text{طب} + \text{طس}}{\text{طا}}$$

(۴) اگر طاس لا + طب مس ب = (طا + طب) مس اس تو ثابت کرو کہ طاب = جسم

(۵) ایک مثلث مستوی کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور انکی نسبت مشترک ہے ہر توثابت کرو کہ ٹرے ضلع کو مجموعہ ضلع سے وہ نسبت ہوگی جو ۲ جب ۱ کے کو واحد سے نسبت ہو (۶) اگر زاویے خارجی ایک مثلث کے ۱ اور ۲ اور ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ طب } ۱ \text{ ح } ۱ + ۲ \text{ طب } ۱ \text{ ح } ۲ + ۲ \text{ طب } ۱ \text{ ح } ۳ = (۲ + ۱ + ۲) \text{ طب } ۱ \text{ ح } ۱$$

(۷) اگر مثلث ۱ ب س کے کسی زاویہ ۱ سے عمود ۱ د قاعدہ پر نکالیں اور د سے عمود دی اور ۱ ب اور ۱ س پر نکالیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ د \cdot ۱ ب \cdot ۱ س = ۱ ف \cdot ۱ س \cdot ۱ ح$$

(۸) اگر ۱ ا و ۱ ب اور ۱ ط س اضلاع مثلث کے ہوں اور مقابل کے زاویے ۱ ا و ۱ ب برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ۱ س = ۱ ب = ۱ ا (۹) مثلث ۱ ب س کا زاویہ ۱ س منفرجہ ہو تو ثابت کرو کہ ۱ س ۱ ب ۱ س ب نسبت واحد ہو (۱۰) اگر اضلاع مثلث کے ۱ ط و ۱ ب و ۱ س سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱ ب}{۱ س} = \frac{۱ ب}{۱ س} \text{ اور } \frac{۱ ط}{۱ س} = \frac{۱ ط}{۱ س} + \frac{۱ ب}{۱ س} = \frac{۱ ب}{۱ س} = \frac{۱ ط}{۱ س}$$

(۱۱) اگر مثلث کے ضلع ۱ ب س کا نقطہ وسط د ہو تو

$$۱ م ب = ۱ د - ۱ م ب = ۱ م$$

(۱۲) اگر مثلث کا ایک زاویہ ۱ س دو حصوں میں تقسیم کیا جائے کہ او سکی حصوں میں وہ نسبت ہو جو او کے اضلاع متصلہ میں نسبت ہو تو ثابت کرو کہ او کے ماس التماموں کا تفاوت برابر ہوں زاویوں کے ماس التماموں کے تفاوت کے ہوگا جو مقابل اوں اضلاع کے واقع ہیں سلسلہ حسابیہ میں ہوئے

(۱۳) اگر مثلث کے زاویوں کے ماس التمام سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو صحیح اور اضلاع بھی

(۱۴) مثلث کا زاویہ ۱ ا س اور نسبت قاعدہ اور ارتفاع کے معلوم ہیں اور زاویہ ۱ ا س عمود سے جو ۱ ا س کے قاعدہ پر نکالا جاوے دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہو تو ان حصوں کے



اضلاع کے ساتھ ایک ہی جانب میں بالترتیب بناتے ہیں تو ثبات کو کہان خطوط سے ایک  
ثلث تشابہ پہلے ثلث کا بنے گا اور ان دونوں مثلثوں کے ابعاد طولانی میں نسبت ہوگی

جسم سہ - جسم سہ (جسم ۱ + جسم ب + جسم س) کو نسبت اس سے ہے

۲۳ سے ۲۴ تک جو مثالیں لکھی ہیں اوکونو ثبات کرو کہ مثلث میں یہ ارتباطات ہونی چاہیے

$$(۲۳) \quad طا (طب جسم س - طس جسم ب) = طب - طس$$

$$(۲۴) \quad طا (جسم ب جسم س + جسم ۱) = طب (جسم ۱ جسم س + جسم ب)$$

$$= طس (جسم ۱ جسم ب + جسم س)$$

$$(۲۵) \quad (طب + طس - طا) مس = (طس + طا - طب) س = (طا + طب - طس) س$$

$$(۲۶) \quad طب جسم ب + طس جسم س = طا جسم (ب - س)$$

$$(۲۷) \quad (طا + طب) جسم س + (طب + طس) جسم ۱ + (طس + طا) جسم ب = طا + طب + طس$$

$$(۲۸) \quad (طا - طب) مم س + (طب - طس) مم ۱ + (طس - طا) مم ب = ۰$$

$$(۲۹) \quad (طا - طب) جسم س + (طس - طا) مم س + (طب - طس) مم ۱ = ۰$$

$$(۳۰) \quad ۱ - مس = مس = \frac{طس}{طا + طب + طس}$$

$$(۳۱) \quad (طا + طب + طس) (جسم ۱ + جسم ب + جسم س)$$

$$= رطا جسم س + رطب جسم ب + رطس جسم ۱$$

$$(۳۲) \quad \frac{ص ۱}{طا} = \frac{جسم ۱ جسم ب}{طا طب} + \frac{جسم ۱ جسم س}{طا طس} + \frac{جسم ب جسم س}{طا طب طس}$$

$$(۳۳) \quad رطا جسم ۱ + رطب جسم ب + رطس جسم س = رطا جسم ب جسم س$$

$$(۳۴) \quad جسم ۱ + جسم ب + جسم س = ۱ + رطا جسم ب جسم س$$

$$(۳۵) \quad طا - رطا طب جسم (۱ + ۲) = طس - رطس جسم (۱ + ۲)$$

$$(۳۶) \quad مم ۱ - مم ۲ = مم ۳ : مم ۴ + مم ۵ : مم ۶ + مم ۷ : مم ۸$$

$$(۳۷) \quad جسم ۱ جسم ۲ جسم ۳ جسم ۴ جسم ۵ جسم ۶ جسم ۷ جسم ۸ = جسم ۹ جسم ۱۰ جسم ۱۱ جسم ۱۲ جسم ۱۳ جسم ۱۴ جسم ۱۵ جسم ۱۶$$

اسمیں ۱ مح =  $\frac{1}{2}$  جم +  $\frac{1}{2}$  جم +  $\frac{1}{2}$  جم

(۳۸) مجموعہ شلٹ کا حجم  $\frac{1}{2}$  فوط  $\frac{1}{2}$  ہے

(۳۹) اگر رجب ۱ + لاجب ۲ = یجب ۳ + رجب ۴ = لاجب ۵ + یجب ۶

توللا: ۵ : ی : : جب ۱۲ : جب ۲۲ : جب ۲۳

(۲۰) جب  $\frac{1}{2}$  جب  $\frac{1}{3}$  جب  $\frac{1}{4}$  ہر صورت میں چھوڑا اسے ہی لیکن  $a = b = c$  جس صورت

چودھواں باب

مشتون کا حل

(۲۲۲) شلت کے چھ اصلی خبریں ہیں تین ضلع تین راویے اور انکو اجزا اور کسی شلت کے کہتے ہیں

شہنشاہ کا جمل کرنا عبارت اسے ہے کہ جب ان چار اجزاء ترکیبی میں سے کافی اجزاء ترکیبی علوم و ہنر

تو اس سے حساب کر کے باقی اخراجات کی کمی کو دریافت کریں تحریر ذیل سے یہ بات ظاہر ہو جائیگی

کہ جب ان چہرہ اجزاء ترکیبی میں سے تین معلوم ہوں تو باقی تین اجزاء ترکیبی ہر حالت میں معلوم

ہو جائیگی مگر اس صورت میں کہ تین زاویے معلوم ہوں تو فقط ضلع کی نسبت یا ہی

معلوم ہوگی مگر وہ خود ضلّاع نہیں معلوم ہوگی بلکہ صورتِ قانونیہ میں لوکارشم کے داخل کرنیکی ضرورت

یہ لکھی اور موافق سابق کے لوکار شرم کی جگہ اختصاراً لوک کا لفظ لکھنے اور اسے لوکار شرم ملحق

سارے عشری کے سمجھنے اور جی علم مستحق محلے کے اول حرف کا لہجے کو اوسے کو کلام

بدولہ اوس جملہ اوس حالت میں جانے لہ لوکارم موقع اساس اے فی باب اور اول

از یادہ کیا جا

بہم ششون کا صل شلت قائم الزاویہ سے شروع کرتے ہیں اور اوسمیں زاویہ س قافرو

15

۲۳) وتر اور ایک حادہ زاویہ شلت قائم الزاویہ کا معلوم ہو اوسکو حل کرو

شرض کرو کہ وتر اور زاویہ معلوم ہو تو

ب. = 9 - 1

$\text{طس} = \text{جب} \div \text{اسیوائے طس} = \text{طس} \div \text{جب} \div 1$   
 $\text{اسیوائے طس} \div \text{لوک طس} = \text{لوک طس} \div \text{لوک جب} \div 1 = \text{لوک طس} \div \text{ل جب} \div 10$   
 $\text{طس} = \text{جب} \div \text{اسیوائے طس} = \text{طس} \div \text{جب} \div 1$   
 $\text{اسیوائے طس} \div \text{لوک طس} = \text{لوک طس} \div \text{لوک جب} \div 1 = \text{لوک طس} \div \text{ل جب} \div 10$   
 پس ب اور طا اور طب معلوم ہو گئی  
 (۲۲۴) وتر اور ایک ضلع ثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہے اس کو حل کرو  
 فرض کرو کہ طس اور طا معلوم ہیں تو  
 $\text{جب} \div 1 = \text{طس} \div \text{لوک جب} \div 1 = \text{لوک طس} \div \text{لوک طس}$   
 $\text{اسیوائے جب} \div 10 = 1 + \text{لوک طس} \div \text{لوک طس}$   
 اسے دریافت ہوگا اور اسے ب = ۹۰۔ کے معلوم ہوگا  
 اور طس = طا + طب  $\div$  اسیوائے طب = طس - طا = (طس - طا) (طس + طا)  
 $\text{اسیوائے طب} = \text{طس} \div \text{اسیوائے طس} = \text{طس} \div \text{طس} = 1$   
 $\text{لوک طب} = \text{لوک طس} \div \text{لوک طس} = 1 + \text{لوک طس} \div \text{لوک طس} = 1 + \text{لوک طس} \div \text{لوک طس}$   
 اور طب کو اس صورت قانونی طب = طس جم اسے دریافت کرو  
 (۲۲۵) ضلع اور ایک زاویہ حادہ ثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہے ثلث کو حل کرو  
 فرض کرو کہ طا اور ۱ معلوم ہیں تو  
 ب = ۹۰ - ۱  
 اور طس = جب  $\div$  اسیوائے طس = جب  $\div$  طس  
 $\text{لوک طس} = \text{لوک طا} - \text{لوک جب} \div 1 = \text{لوک طا} - \text{ل جب} \div 10 + 1$   
 $\text{طس} = \text{مس} \div \text{اسیوائے طس} = \text{طس} \div \text{مس} \div 1$   
 $\text{لوک طس} = \text{لوک طا} - \text{لوک مس} \div 1 = \text{لوک طا} - \text{ل مس} \div 10 + 1$

پس ب اور طس اور طب دریافت ہو گئی  
اگر ط اور ب معلوم ہوں تو  $۱ - ۹۰ = ۰$  - ب کے ہوگا پس ب دریافت ہو گیا اور اوج کے طس اور  
طب کو موافق سابق کے دریافت کر سکتے ہیں  
(۲۲۶) دو ضلع مثلث قائم الزاویہ کے معلوم ہیں ثلث کو حل کرو

یہاں ط اور طب معلوم ہیں تو  
مس  $۱ = \frac{\text{ط}}{\text{طب}}$  اسیو اسطے کوک مس  $۱ = \text{لوک ط} - \text{لوک طب}$   
اسیو اسطے ل مس  $۱ = ۱۰ + \text{لوک ط} - \text{لوک طب}$   
ب  $۱ - ۹۰ = ۰$

طس  $\frac{\text{ط}}{\text{طب}} = \text{جب ۱}$  اسیو اسطے طس  $\frac{\text{ط}}{\text{طب}} = \text{جب ۱}$   
اسیو اسطے کوک طس  $= \text{لوک ط} - \text{لوک طب}$  جب  $۱ + ۱۰$   
اور طس کو اس صورت قانونی طس  $= \text{ط} + \text{طب}$  اسیو اسطے کوک اسطے حساب  
(۲۲۷) جب جب تمام اور جب معکوس اور ماس اور ماس تمام اور قاطع الزاویہ میں سے  
ایک کے معلوم ہونے سے جب زاویہ ثلث کا معلوم ہوتا ہے تو اس میں کچھ اشتباہ کی جگہ نہیں رہتی  
کیونکہ  $۱۸۰$  سے کم جنے زاویے ہیں ان کے مجموعہ کی ایک ہی قیمت ہوتی ہے مگر جب اور قاطع تمام  
سے جو ایک زاویہ ثلث کا دریافت ہوتا ہے تو اس میں اشتباہ رہتا ہے کیونکہ  $۱۸۰$  سے کم ہونے  
زاویے دو ایسی ہو سکتی ہیں کہ ایک ہی جب معلوم یا قاطع تمام معلوم رہتی ہیں مگر ثلث  
قائم الزاویہ کی حالت میں کوئی محل اشتباہ کا نہیں رہتا کیونکہ زاویے ثلث کے سوا قائم  
کے حادی ہوتے ہیں

اب ثلث غیر قائم الزاویہ کا حل لکھتے ہیں  
(۲۲۸) دو زاویے اور ایک ضلع مثلث کا معلوم ہے ثلث کو حل کرو  
فرض کرو کہ  $۱$  اور  $۲$  معلوم زاویے ہیں اور  $۳$  ضلع معلوم ہے





دریافت کرنی پڑتی ہیں

$$\frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}}$$

اور جب ب + جب س = ۲ جب ا (ب + س) جم ا (ب - س) بوجب دفعہ ۱۳

$$\frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}} = \frac{\text{طس}}{\text{جب س}}$$

لوکار ٹم طس + طس کی توکل کے پہلی جزو میں استعمال میں آئی ہو اب ہر صورت دو  
نئی لوکار ٹم یعنی جب ا اور جم ا (ب - س) کی دریافت کرنی پڑیگی  
(۲۴۱) دفعہ گذشتہ میں تقادیر معلوم سے پہلے اسے کہ ہم باقی دو زاویے دریافت کریں گے  
ضلع کو دریافت کر سکتے ہیں اس واسطے کہ بوجب دفعہ ۲۱۵ کے

$$\text{طا} = \text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا}$$

اور ہم اس کی صورت کو اسی صورت کی طرف تبدیل کرتے ہیں کہ وہ لوکار ٹم حساب کے قابل

$$\text{طا} = \text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا} (۱ - \frac{1}{2})$$

$$= (\text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا})$$

$$= (\text{طس} + \text{طس} - ۱) - \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا})$$

اب ہم ایک زاویہ برابر دریافت کرتے ہیں کہ

$$\text{جب ا بر} = \frac{\text{طس}}{\text{طس}} = \frac{\text{طس}}{\text{طس}}$$

$$\text{پس طا} = (\text{طس} + \text{طس} - ۱) - \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا})$$

$$\text{اس واسطے طا} = (\text{طس} + \text{طس} - ۱) - \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طس} - ۲ \text{ طس جم ا})$$

$$\text{اس واسطے لوک طا} = \text{لوک} (\text{طس} + \text{طس} - ۱) + \text{لوک} \text{ جم ا بر} = \text{لوک} (\text{طس} + \text{طس} - ۱) + \text{لوک} \text{ جم ا بر} = ۱۰$$

پس طا دریافت ہو گیا

جب کسی زاویہ کو اس طرح کسی جملہ میں داخل کرتے ہیں کہ اس سے وہ جملہ اجزاء ضربی میں نکلیں ہو جائے تو اس زاویہ کو اکثر زاویہ مستعان کہتے ہیں تحقیقات مذکور میں ہر زاویہ مستعان ہے بلکہ وہ یہ تحقیق معلوم تھا کہ ایک ایسا زاویہ ضرور ہوگا جسکی جیب کا مربع برابر جملہ معلوم کے ہو کیونکہ جملہ مثبت ہے اور واحد سے اس سبب کم ہے کہ ہم طے ہی ٹرا (طا + طے) سے نہیں ہو سکتا اور جرم  $\frac{1}{2}$  چھوٹی بہ نسبت واحد کے ہے اور مساوات کی کوکارم کئی طرح دریافت ہوتا ہے کہ

لوک جبر = لوک ۲ + لوک طے + لوک طے - لوک (طے طے) + لوک جرم  $\frac{1}{2}$   
 ایسا طے ال جبر = لوک ۲ + لوک طے + لوک طے - لوک (طے طے) + لوک جرم  $\frac{1}{2}$   
 (۲۲۲) جب کہ کوکارم طے اور طے کی معلوم ہوتی ہیں تو بعض اوقات دفعہ ۲۲۹ کا عمل

زاویہ مستعان کے اعانت سے آسان ہو جاتا ہے

$$\text{ہمکو معلوم ہے کہ مس } \frac{1}{2} = (س - ب) = \frac{\text{طے طے}}{\text{طے طے}} \text{ م } \frac{1}{2}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ } \frac{\text{طے}}{\text{طے}} = \text{مس بر ایسا وسط}$$

$$\frac{\text{طے طے}}{\text{طے طے}} = \frac{\text{مس بر} - ۱}{\text{مس} (بر - کچھ)}$$

$$\text{پس مس } \frac{1}{2} = (س - ب) = \frac{\text{مس} (بر - کچھ)}{\text{مس} (بر - کچھ) + ۱} \text{ م } \frac{1}{2}$$

یا اس طرح کہ فرض کرو طے چھوٹا طے ہے ہو تو طے = طے جرم سر

$$\text{ایسا وسط } \frac{\text{طے طے}}{\text{طے طے}} = \frac{۱ - \text{مس سر}}{۱ + \text{مس سر}} = \text{مس سر}$$

$$\text{پس مس } \frac{1}{2} = (س - ب) = \frac{\text{مس سر}}{\text{مس سر} + ۱} \text{ م } \frac{1}{2}$$

(۲۲۳) دو ضلع معلوم ہیں اور انہیں سے ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

فرض کرو کہ طا اور طے اضلاع معلوم ہیں اور زاویہ معلوم ہے

$$\text{پس جب } \frac{\text{طے}}{\text{طا}} = \text{ایسا وسط جب ب} = \frac{\text{طے}}{\text{طا}} \text{ جب } ۱$$

اب اگر  $\frac{ط}{ح}$  چوٹا نسبت واحد ہو تو دو مختلف زاویہ چھوٹے ۸۰ سے دریافت ہونگے جنہوں میں سے ہر ایک کی جیب  $\frac{ط}{ح}$  ہوگی اور انہیں سے ہر ایک قائمہ سے چھوٹا اور دوسرا بڑا ہوگا اگر  $\frac{ط}{ح}$  سے ہو تو بڑا اب سے ہوگا اس واسطے ب زاویہ چارہ ہوگا اسلئے چھوٹی قیمت ب کی دخل میں رکھتی ہے اور یہ تحقیق ہو گیا تو اس سے دریافت ہو سکتا ہے کیونکہ وہ برابر ۹۰ - ۱ - ب کے ہے اور پس اس صورت سے دریافت ہوگا کہ

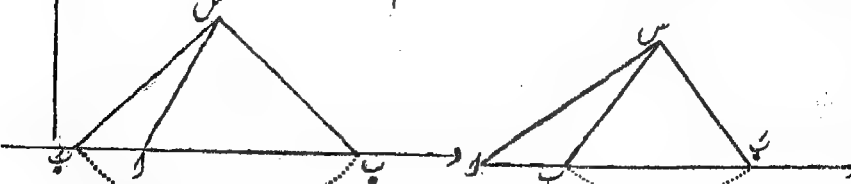
$$\frac{ط}{ح} = \frac{ج}{ب}$$

ہوئے

پس اگر ب کی دو قیمتیں حل میں داخل ہو سکتی ہیں تو ان کی مطابق دو قیمتیں س اور طس کی پس اجزاء معلوم سے دو مثلث دریافت ہونگے

اگر  $\frac{ط}{ح} = ۱$  = اتوب زاویہ قائمہ ہوگا تو اجزاء معلوم سے صرف ایک زاویہ دریافت ہوگا اور اگر  $\frac{ط}{ح} > ۱$  بڑا واحد سے ہو تو کوئی مثلث ایسا نہیں ہو سکتا کہ وہ اجزاء معلوم ہو

پس جب دو ضلع معلوم ہوں اور انہیں سے ایک ضلع کا مقابل زاویہ معلوم ہو تو اکثر دو مثلث اجزاء معلوم سے دریافت ہونگے مشکوٰۃ کے حل میں اس صورت کو صورت مشتبہ کہتے ہیں یہ لکھا کہ اکثر دو مثلث دریافت ہونگے یہ اکثر کی قید اس واسطے ہے کہ یہ ضرور نہیں کہ ہمیشہ وہی مثلث دریافت ہو اگر بعض صورتیں مشتبہ ہیں ایک صورت مشتبہ یہ ہے کہ مثلث قائم الزاویہ ہو تو صرف ایک ہی مثلث دریافت ہوگا صورت دوم یہ ہے کہ مثلث کا بنا ہی ناممکن ہو (۲۳۴) شکلوں سے صورت مشتبہ کی توضیح اور تشریح کرتے ہیں



فرض کرو کہ س زاویہ معلوم ہے اور اس ضلع معلوم ط ب اور س کے مرکز او ط کے بڑے نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچیں جو عموداً دہر نکالا جائیگا برابر ط ب جب اس کے ہوگا اس واسطے

اگر طاء طرب جب اسے ہو تو دائرہ اسے دو نقطوں ب اور پ پر لگا اور اگر طاء چوٹا طرب ہے  
 ہو تو ب اور پ ایک ہی جانب میں لگے ہوگا جیسا کہ اول شکل میں کچا ہوئے تو دو شلتون  
 اب میں اور اب میں حاصل ہونگے جنکے اجزاء معلوم طاء اور طرب اور انہوں کے اور اگر طاء بڑا  
 طرب ہے ہو تو ب اور پ مخالف جانبوں میں لگے واقع ہونگے جیسا کہ دوسری شکل میں کچا  
 ہوا تو صرف ایک شلتون میں اب حاصل ہوگا جسکے اجزاء معلوم طاء اور طرب اور انہوں کے  
 شلتون میں اب کا زاویہ میں اب کا ۱۸۰ - و بجای لگے ہو اور اگر طاء برابر طرب جب اسے  
 کے ہو تو دائرہ خط اسے دو مس کرے گا اور دو نقطے ب اور پ اول شکل میں ایک دوسرے منطبق  
 ہو جائیں گے پس ایک شلتون حاصل ہوگا جس کا زاویہ ب قائم ہوگا  
 اگر طاء چوٹا طرب جب اسے ہو تو دائرہ خط اسے نہیں ملے گا ہوگا اور شلتون جسکے اجزاء معلوم  
 طاء اور طرب اور انہوں کے معلوم ہوگا  
 (۲۳۵) دفعہ ۳۳۳ میں زاویہ ب کا اول دریافت کیا تھا اور بعد ازاں ضلع طاء معلوم  
 اب ہم ایک اور طرح سے حل لکھتے ہیں اور اول طس کو دریافت کرتے ہیں  

$$\text{ط} = \text{طرب} + \text{طس} - \text{طجم}$$

$$\text{اسی طرح طس} = \text{طجم} + \text{طرب} - \text{ط} = ۰$$
 اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ  

$$\text{طس} = \text{طجم} \pm \sqrt{\text{ط}^2 - \text{طرب}^2}$$
 اب طس کی جو قیمتیں دریافت ہوئی ہیں ان پر بحث کرتے ہیں  
 اگر طاء چوٹا طرب جب اسے ہو تو قیمتیں طس کی ناممکن ہیں اور شلتون اجزاء معلوم  
 رکھنے والا معدوم ہوگا اگر طاء برابر طرب جب اسے ہو تو طس = طجم اور اگر زاویہ چاہے  
 ہو تو طس قیمت ہوگا اور اجزاء معلوم سے ایک شلتون نیک اور اگر زاویہ منفی ہے ہو تو طس  
 منفی ہوگا اور اسے معلوم ہوتا ہے کہ شلتون ناممکن ہے اور نفس الامر میں طاء چوٹا طرب

ثلثوں کا حل

باب چہارم  
 کیونکہ وہ برابر طاب جب کے ہو اور اس کے کسی اصلی ثلث میں از او یہ منفرض نہیں ہو سکتا  
 اگر طاب طاب جب اسے ہو تو دو قضیتیں اس کے نکلتی ہیں اور یہ دونوں ثبوت ہو گئیں اگر از او یہ جادہ  
 اور طاب جم اور طاب نسبت (طاب - طاب جب) کے ہوتا ہے تو اس آخر شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے  
 کہ طاب جم اور طاب نسبت طاب - طاب جب کے ہو یعنی طاب طاب نسبت طاب کے ہو  
 اسے معلوم ہوتا ہے کہ اگر از او یہ جادہ ہو اور طاب طاب جب اسے اور طاب طاب کے ہو تو  
 دو ثلث دریافت ہو گئے

(۲۳۶) تینوں ضلع معلوم ہیں ثلث کو حل کرو  
 فرض کرو کہ م نصف مجموعہ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۱۷ کے

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{(م - طاب) (م - طس)}{طاب طس} \quad \text{اور جم } \frac{1}{2} = \frac{(م - طاب) (م - طس)}{طاب طس}$$

اور اسی قبیل کی اور صورت قانونیہ بھی نصف زاویوں کے واسطے ہیں  
 نصف زاویوں کے ماسوچ کے واسطے جو صورت قانونیہ ہیں وہ سب زیادہ حساب کو کاٹتی ہیں  
 مناسب ہیں کیونکہ ان میں لوکارٹم صرف م اور م - طاب اور م - طس کی تین  
 زاویوں کے دریافت کرنے کے واسطے معلوم کرنی پڑتی ہیں برخلاف اسکے اگر دو صورت قانونیہ کا  
 کریں تو ان میں اور زیادہ لوکارٹم ضلع کی بھی دریافت کرنی پڑتی ہے

(۲۳۷) اگر ثلث کے تمام ضلع معلوم ہوں تو ثلث کو دو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر کے ہم  
 زاویے دریافت کر سکتے ہیں  
 دفعہ ۱۱۴ کے بائیں طرف کی شکل میں

$$\begin{aligned} &ا د = ا ب - ب د \quad ا و = ا س - س د \\ &اسیوٹے ا ب - ا س = ب د - س د \\ &اسیوٹے (ا ب + ا س) (ا ب - ا س) = (ب د + س د) (ب د - س د) \end{aligned}$$

اسے ہم ب + د - س دریافت کر سکتے ہیں اور چونکہ ب + د + س معلوم ہے

اس لیے ب + د اور س معلوم ہو سکتی ہیں تو

$$\text{جم ب} = \text{ب} + \text{د} - \text{س} \quad \text{اور جم س} = \text{ب} + \text{د} - \text{س}$$

اسے ب اور س دریافت ہونگے

اور دفعہ ۲۱۴ کے دائیں طرف کی شکل میں موافق سابق کے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ب} + \text{د} - \text{س}) (\text{ب} - \text{د} - \text{س}) = (\text{ب} + \text{د} - \text{س}) (\text{ب} - \text{د} - \text{س})$$

اسے ب + د + س معلوم ہو سکتا ہے اور ب + د - س پہلی ہی کے معلوم ہیں تو ب + د اور س معلوم ہونگے اور

$$\text{جم ب} = \text{ب} + \text{د} - \text{س} \quad \text{اور جم س} = (\text{ب} + \text{د} - \text{س}) (\text{ب} - \text{د} - \text{س})$$

اسے ب اور س معلوم ہو سکتے ہیں

(۲۳۸) بارہویں باب میں ہم ثابت کیا ہے کہ علم ثلثی جلوچ کے جدولوں کا ہمیشہ فائدہ کے ساتھ

استعمال نہیں ہو سکتا اسے ہر گز یہ ہدایت ہوتی ہے کہ جب ثلثون کے حل کی ایک سے زیادہ ترکیبیں

ہوں تو ان میں سے ایک ترکیب کو اختیار کرنا چاہیے اور بعض صورتوں میں اس حل کی بھی تیسیم

کرنی چاہیے مثلاً فرض کرو کہ مساوات جب  $1 = 1$  سے لاکا دریافت کرنا منظور ہو جس میں

ن تقریباً برابر واحد کے ہو اس مساوات سے لاکا دریافت کرنا ایک وقت کی بات ہو کر نہ

جب زاویے قائم کے قریب قریب ہوں تو متصل کے جیبوں کا تفاوت قابل لحاظ کے

نہیں ہوتا مگر یہ معلوم ہے کہ

$$\text{جم} (1 - 40) = \text{جم} (1 - 40)$$

$$\text{جم} (1 - 40) = \text{جم} (1 - 40)$$

اس صورت قانونی پر کچھ اعتراض نہیں ہو سکتا

اور علیٰ ہذا القیاس اگر ہم کو اس مساوات





ثالثین

۱۶۴

باب چہارم

توط بڑا نسبت واحد کے اور چھوٹا نسبت  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  کے ہوگا  
(۱۱) اگر لوک ط ۱۰۰ = لوک طب + حب و تصور مشتبہ ثلث کی حل کی

(۱۲) اگر بر کو اس مساوات

$$\frac{\text{ط} - \text{طب}}{\text{طس}}$$

سے دریافت کریں تو بر ثلث میں

$$\text{جم } \frac{1}{2} = \frac{(\text{ط} + \text{طب}) \text{ جم بر اور جم } \frac{1}{2} = \frac{\text{طس}}{2}$$

(۱۳) اگر س سر =  $\frac{2}{3} (\text{ط} - \text{طب})$  جب س تو طس =  $(\text{ط} - \text{طب})$  قط سر

(۱۴) اگر ثلث اب س میں ط = ۱۸ اور طب = ۲۰ اور طس = ۲۲ تو ل س  $\frac{1}{2}$

کو دریافت کرو اور

لوک ۲ = ۳۰۰۱۰۳۰۰ اور لوک ۳ = ۱۲۱۳۰۰۰۵۲۴  
(۱۵) اضلاع ثلث کے ۳ د ۴ د ۶ د میں سے بڑا زاویہ دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

$$\text{لوک } ۲۰ = ۲۵۳۱۵۹۰۳ = \text{لوک } ۱۰۰۰۳۰۵۹۹۰$$

ل جم ۶۶ = ۱۸۰۴۷۲۷۳۷۳ = ۹۵۶۷۲۷۳۷۳ کے واسطے = ۳۳۳۳۳۰۰۰

(۱۶) اضلاع ثلث کے ۴ د ۶ د ۸ د میں سے کو دریافت کرو اور لوک ۲ = ۳۰۰۱۰۳۰۰

ل جم ۶۵ = ۱۸۰۴۷۲۷۳۷۳ = ۹۵۶۷۲۷۳۷۳ کے واسطے = ۳۰۰۰۰۰۰۰۰

(۱۷) جم  $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} (\text{ط} - \text{طب})$  تو س سے بڑا زاویہ اس ثلث میں دریافت کرو جس میں

اضلاع ۵ د ۶ د ۷ فیٹ ہوں اور معلوم ہے کہ لوک ۶ = ۷۷۸۱۵۱۳

ل جم ۶۹ = ۱۸۰۴۷۲۷۳۷۳ = ۹۵۶۷۲۷۳۷۳ کے واسطے = ۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰

(۱۸) ایک ثلث کے دو ضلع ۱۸ اور ۳ فیٹ اور درمیانی زاویہ اونکاح ۵۵ ہر تو باقی

زاوے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰۰۱۰۰۰۰ = \text{ل جم } ۶۰ = ۲۰۰۲۸۳۵۳۳۳$$

ل س ۵۶ ۵۶ = ۱۰۵ ۱۸۶۳۷۹۹ = تفاوت ۱ = ۶۳ ۷۰۰۲

(۱۹) ایک مثلث کے دو ضلعوں میں نسبت ۹ اور ۷ کی ہو اور زاویہ درمیانی اونکا ۱۲۹ اور زاویے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ اور ل س ۵۶ ۵۶ = ۱۰۵ ۲۰۲۵۵

ل س ۱۱ = ۱۶ = ۹۵۲۹۹۳۲۱۴ ل س ۱۱ = ۸۰۴ = ۹۵۲۹۹۹

(۲۰) اگر ط = ۷۰ اور ط = ۳۵ اور س = ۳۶ ۵۲ باقی زاویے دریافت کرو

اور یہ معلوم ہو کہ لوک ۳ = ۲۱۳ = ۲۷۷ اور ل م ۱۸ = ۲۶ = ۱۰۵۷۷۷۱۳

(۲۱) مثلث کے دو ضلعوں میں نسبت ۹ اور ۷ کی ہو اور درمیانی زاویہ اونکا ۲۵ اور زاویے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ل س ۱۱ = ۹۴ = ۱۰۵ ۳۵ = ۳۹۶۲

ل س ۱۵ = ۳۵ = ۹۵۷۵۷۱۷۷۹ تفاوت آگے واسطے = ۷۷۷۷۷۷۷

(۲۲) مثلث اب س میں ط = ۳۰ اور ط = ۲۰ اور درمیانی زاویہ اونکا ۲۲

اور زاویے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

ل م ۱۱ = ۷۷ = ۱۰۵ ۱۱۳۲۷۷ ل س ۱۵ = ۲۸ = ۱۰۵ ۱۲۱۲۹۷

ل س ۱۵ = ۲۹ = ۱۰۵ ۱۲۳۸۲۱ لوک ۲ = ۱۰۳۰ = ۱۳۰

(۲۳) معلوم ہے کہ ط = ۱۲ اور ۱ = ۹۰ تو ثابت کرو کہ ب = ۲۹

اور یہ معلوم ہے کہ ل س ۱۱ = ۲۹ = ۹۵۳۱۷۷

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ لوک ۳ = ۱۲ = ۱۳۰

(۲۴) اضلاع ایک مثلث کے ۷۷ ۹۰ ۹۰ ہیں اور سب زاویے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰

ل س ۲۲ = ۵۰ = ۹۵۷۵۰۵۷۷۷ ل س ۲۲ = ۵۰ = ۹۵۷۵۰۵۷۷

ل س ۲۹ = ۱۲ = ۹۵۷۷۷۷۷۷ ل س ۲۹ = ۱۲ = ۹۵۷۷۷۷۷۷

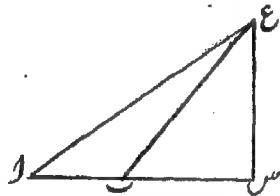


# پندرہواں باب

ارتفاع اور فاصلوں کی پیمائش

(۲۳۹) اب بعض مثالیں لکھتے ہیں جیسے یہ معلوم ہوگا کہ باب گذشتہ کے بعض قانون عملیات میں کس سے اس بات کو تسلیم کر لیا ہے کہ بواسطہ بعض آلات کے وہ زاویہ ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں جو ہمارے آنکھ پر مجازی اوس خط کے بنے کہ جو درختوں کے درمیان ملا یا جا اور یہ دونوں ہمواد کہاں کی دیتی ہیں اگر آلات کا حال مفصل دیکھنا ہو تو ایسی کتابوں میں دیکھو جو سر و نیک کی کتابوں میں آلات کے باب میں لکھی گئی ہیں

۲۴۰ سطح افقی پر ارتفاع اور فاصلہ ایک شے کا دریافت کرو جس تک ہم جا نہیں سکتے



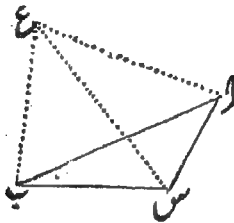
فرض کرو کہ 'ع' اوس شے کا ہے اور اس کا ارتفاع 'ع' س دریافت کرو اور س پر سے ایک سطح افقی گزرتی ہے اوس میں نقطہ 'ا' ہے اوسے فاصلہ اوس شے کا دریافت کرو اور یہ زاویہ 'ا' س مشاہدہ کرو اور کوئی طول لب سیدہ میں اوس شے کی پیمائش کرو اور ب پر زاویہ 'ع' ب س مشاہدہ کرو اب مثلث 'ع' اب میں ضلع 'اب' معلوم ہے اور زاویہ 'ع' اب معلوم ہے اور 'ع' ب 'ا' س سب کا معلوم ہے کہ وہ مثلث 'ع' ب س کا ہے اسی واسطے 'ع' اب ہی معلوم ہو سکتا ہے

تو 'ع' س = 'ع' جب 'ع' 'ا' س اور 'ا' س = 'ع' جم 'ع' 'ا' س پس اسے ارتفاع 'ع' س اور فاصلہ 'ا' س دریافت ہوگا

اب کا سیدہ میں اوس شے کا ناپنا آسان نہیں ہے اسلئے عمل اس طرح کرنا چاہئے کہ اب کو کسی سمت میں 'ا' سے ناپ لو اور 'ا' پر زاویہ 'ع' 'ا' س اور 'ع' 'ا' ب اور ب پر زاویہ 'ع' ب 'ا'



(۲۴۲) تین نقاط آ اور ب اور س میں جو خطوط وصل ہوں اور ان کے طویل معلوم ہوں اور کسی نقطہ ع پر اس کے سطح میں جس میں دو بوس میں زاویہ دے س اور ب سے اس زاویہ کے برابر کے اب مطلوب یہ ہے کہ ع کا فاصلہ ہر ایک نقطہ آ اور ب سے دریافت کریں



زاویہ دے ع کو س سے اور ب سے اور ع اس کو آ سے اور زاویہ ع ب س کو ع سے تعبیر کرو تو سہ اور سہ معلوم ہیں اور جب لا اور س معلوم ہو جائیں تو فاصلہ مطلوب آ اور ب اور ع س بھی دریافت ہو سکتے ہیں کیونکہ ہر ایک مثلث ع لا س اور ع ب س میں دو زاویے اور ایک ضلع معلوم ہو جائیگا اب ہم یہ بتاتے ہیں کہ لا اور ع کس طرح دریافت ہوتے ہیں چونکہ ذرا ربعہ لا ضلع ع لا س ب کے چاروں کونوں ملکر برابر چار کونوں کی ہوتے ہیں تو لا + س = ۲ کہ = سہ - سہ - عہ - س پس اسے مجموعہ لا اور س کا معلوم ہو گیا

اور مثلث لا س ع سے یہ ملے گا حاصل ہوتا ہے

$$ع س = \frac{لا س ح ب ع لا س}{ح ب لا ع س} = \frac{ط ب ح ب لا}{ح ب سہ}$$

اور مثلث ب س ع سے یہ ملے گا معلوم ہوتا ہے

$$ع س = \frac{ب س ح ب ع ب س}{ح ب ب ع س} = \frac{ط ا ح ب و}{ح ب سہ}$$

$$اب سہ = \frac{ط ب ح ب لا}{ح ب سہ} = \frac{ط ا ح ب و}{ح ب سہ}$$

$$اسیو سہ = \frac{ح ب لا}{ح ب و} = \frac{ط ب ح ب لا}{ط ا ح ب و}$$

اب فرض کرو کہ ط ا ح ب سہ = س س تو س سرگرمی قیمت علم مثلثی جدولوں سے معلوم ہو سکتی ہے

پس  $\frac{جیب\ ۱۵}{جیب\ ۱۰} = مس\ ۱۵$

اسیو  $\frac{جیب\ ۱۵}{جیب\ ۱۰} = مس\ ۱۰ = مس\ (سر - کچ)$

اسیو  $\frac{جیب\ ۱۵}{جیب\ ۱۰} = مس\ ۸ = مس\ (۵ - لا) = مس\ (سر - کچ)$

اس آخر مساوات سے لا - ۵ دریافت کر سکتے ہیں اور پہلے لکھے گئے ہیں کہ لا - ۵ سب سے معلوم ہے تو لا اور ۵ دریافت ہو جائیگا

(۲۳۳) مثلثوں کے حل میں بعض اجزاء معلوم ہوتے ہیں اور بعض اجزاء مطلوب ہوتے ہیں جسے اجزاء معلوم میں کچھ غلطی واقع ہو تو اس غلطی کے سبب اجزاء مطلوب میں جو غلطی واقع ہو اس کی مقدار کا دریافت کرنا بعض اوقات ایک بڑی بات ہو کر تی ہے اس قیل کے سوا اللہ علم خبر نیات سے بخوبی حل ہوتے ہیں مگر یہاں ہم دو ایک مثالیں لکھتے ہیں جو اس علم مثلث سے ہی طالب علم کی سمجھ میں آسکتے ہیں

(۲۳۴) فرض کرو کہ ارتفاع کسی عمارت کا اس طرح دریافت ہو کہ اوسکے قاعدہ کے خط افقی پائیش کیا ہو اور اس خط کی طرف پر سر عمارت کا زاویہ ارتفاعی افق کے اوپر شاہد کیا ہو اگر چھوٹی سی غلطی اس زاویہ کے شاہد کرتے میں واقع ہو تو تباہ عمارت کے ارتفاع میں جسکا تخمینہ ہم کر چکے ہیں کس قدر غلطی واقع ہوگی

فرض کرو کہ جو خط پایا گیا ہو اوسکا طول طہی اور زاویہ شاہد کیا گیا ہو ہی اور عمارت کا ارتفاع تخمینہ کیا گیا لا ہے

تو لا = ط مس بر

فرض کرو کہ بر + ص صحیح زاویہ ہے اور لا + کر صحیح ارتفاع ہو

تو لا + کر = ط مس (بر + ص)

اور تفریق کرنے سے کر = ط [مس (بر + ص) - مس بر] = ط ص

اگر ص چھوٹی ہو تو ص جب ص کی جگہ ص شمار کنندہ میں اور ص بر کو بجائے ص (بر + ص) کے نب نہیں لکھ سکتے ہیں تو





- (۱) میدان کوہ میں ایک مقام کے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۶۰ کا دیکھا اور جب چوٹی کی طرف ایک سطح مائل پر چوہا کا زاویہ افق سے بناتی تھی چڑھے تو دوسری مقام میں پر زاویہ ۳۵ کا مشاہدہ کیا تو پہاڑ کی بلندی گزوں میں دریافت کرو
- (۲) یائین برج سے افقی قاعدہ ۱۰۰ اگرز کا پیمائش ہوا اور اس کے انجام پر زاویہ ارتفاع برج کا مشاہدہ کیا گیا تو برج کی بلندی دریافت کرو
- (۳) ایک مقام لٹیک جنوب میں ایک برج کے تہا و مان کے زاویہ ارتفاع برج کا مشاہدہ ہوا اور ایک مقام لٹیک مغرب میں لکے ط فاصلہ پر اسے تہا و مان زاویہ ارتفاع ۸۰ کا مشاہدہ ہوا تو ثابت کرو کہ ارتفاع برج کا

ط

- (۴) سطح ہوا پر ایک برج تھا اور اس برج پر ایک علم قائم تھا اس سطح ہوا پر ایک شخص دیکھتا ہے کہ اگر وہ یائین برج سے ط فیٹ کے فاصلہ پر ہو تو برج کی برجی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط میں نظر آتی ہیں اور ص فیٹ کے فاصلہ برج سے اس کی آنکھ پر علم کے محاذی وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے بنا تھا اور سر علم اور چوٹی پہاڑ کی ایک خط میں نظر آتی ہے تو ثابت کرو کہ اگر سطح افقی پر ارتفاع برج کا مشاہدہ کریں تو الی کی آنکھ پر ص فیٹ ہو تو ارتفاع پہاڑ کا سطح افقی پر  $\frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ص}$  ہوگا
- (۵) ایک آدمی یہ چاہتا تھا کہ ایک شے کا فاصلہ جہاں وہ نہیں جاسکتا تھا دریافت کرے اور سطح افقی پر تین مقامات پر دریافت کئے کہ اوپر اس شے کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک ہی بنتا تھا تو اس فاصلہ کو کس طرح دریافت کریں
- (۶) ایک شخص چاہتا تھا کہ تین اشیا لا اور ب اور س کے درمیان جہاں وہ جا نہیں سکتا تھا فاصلہ دریافت کرے وہ لا اور ب کی سیدہ پر کھڑا ہوا اور پھر س

مثالیں

باب پانزدہم  
سمت میں کیا جو اب کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائی ہیں اور اون مقامات کے فاصلوں کو پانچواں اور سہواں  
اور اوس اوسے ایک خط میں اور اب اور سہواں خط میں نظر آئے جس میں وہ خود کھڑا تھا اور ان  
مقامات پر اوئے اضافی ہی مشاہدہ کرتا ہے تو اب اور سہواں کے درمیان فاصلوں کو سطح پر دریا

(۷) ایک دریا کے کنارہ پر دو بلین اب اور سہواں فاصلہ اس = اب پر قائم ہوئے ہیں اور  
ارتفاع سہواں کا ایک کہ اب اور سہواں کے محاذی برابر زاویے مقام ہی پر بنے ہیں اور یہ مقام  
ہی ٹھیک متقابل لاکے دوسرے کنارہ پر دریا کے ہی تو ثابت کرو کہ عرض دریا کا مجذور

سہواں - اب ہے اور یہ برابر زاویے اب اور سہواں کے محاذی بنے ہیں

(۸) ایک برج ص فیٹ بلند تھا اور اوس پر علم طیفٹ بلند قائم تھا تو تباؤ سطح افقی برج پائین  
برج میں گذرتی ہے کس مقام پر کھڑا ہو کہ برج اور علم کا زاویہ نظری ایک ہی ہو اور ارتفاع

چشم ہے  
(۹) ایک برج سطح افقی پر قائم ہو شمال کی طرف جھکا ہوا ہے پائین برج سے جنوب کی سمت میں ط  
اور ص کے فاصلوں پر زاویے ارتفاع برج کے سہواں میں اب اگر زاویہ میلان برج کا برابر ارتفاع  
عمودی ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس بر} = \frac{\text{ص - ط}}{\text{ص - سہواں}} \text{ اور } \frac{\text{ص - ط}}{\text{ص - سہواں}} = \frac{\text{ص - ط}}{\text{ص - سہواں}}$$

(۱۰) ایک برج کی برجی پر طیفٹ بلند ایک شے انہی ہوئی ہے اور پائین برج سے ص فیٹ کے فاصلہ  
اوس کے محاذی زاویہ لیتا ہے ارتفاع برج کا دریافت کرو

(۱۱) ایک دریا کے کنارہ پر ستون ۲۰۰ فیٹ بلندی اور اوس پر ایک بت ۳۰ فیٹ بلند تھا اور  
ستون کے پاس نیچے ایک شخص ۶ فیٹ قد کا کھڑا ہے اور دوسرے کنارہ پر ایک شخص کی نگاہ پر  
وہ بت اور یہ شخص ایک ہی زاویہ نظری بناتے ہیں تو عرض دریا کا دریافت کرو

(۱۲) ایک گلی کا عرض ۳۰ فیٹ ہے اور اوس کی ایک جانب میں ایک مکان کے محاذی بل  
کی جانب کی کھڑکی پر زاویہ قائمہ بنا کر اور مکان کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع افق ۶۰ کا ہے

تو بلند ری مکان کی دریافت کرو

(۱۳) درمیناروں کی بلندیائی اگر برابر ہیں اور مکے قاعدوں میں جو خط ملتا ہے اوس پر ایک شخص کھڑا ہو کر ایس کی سینا کا زاویہ ارتفاع ۹۰ کا دیکھتا ہے اور یہ وہ شخص ۸۰ فیٹ اوس سمت میں گیا جو زاویے قائمے اوس خط کے ساتھ بناتی ہے کہ میناروں کے قاعدوں میں ملایا جا اور مان اوسنے زاویے ارتفاعی اور کمرہ ۴۵ اور ۲۵ مشاہدہ کئے تو اونکا ارتفاع اور باہمی فاصلہ دریافت کرو

(۱۴) ایک خط افقی ایک شے کے نیچے سے گزرتا ہے اوس پر تین مقامات اور ب اور س سے اوس مشاہدہ کیا زاویہ ارتفاعی ب پر دو چند اور س پر سہ چند نسبت اوس زاویہ کتبہ ہے جو زاویہ ارتفاعی بنتا ہے اور ب = ط اور ب س = ض تو ثابت کرو کہ ارتفاع اوس شے کا

$$\frac{ط}{ب س} = \frac{(ط + ص) (ص - ط)}{ص^2}$$

اور زاویہ ارتفاعی کا ماس ۱۵ ہو تو ثابت کرو کہ ط = ۳ ص

(۱۵) ایک برج عمود وار قائم ہے اور اوس کا قاعدہ اوس سطح افقی میں ہے جس پر ایک آدمی مشاہدہ کرنا چاہتا ہے اس آدمی نے مقام سے اوس برج کو شمال میں دیکھا اور زاویہ نظری ۵۰ کا پایا اور یہ شخص ۱۰۰ گز ص اور زاویہ نظری اوسکا ہمیشہ وہی زاویہ رہا اور مقام برج کا شمال شرق ہو گیا تو اوسکا ارتفاع اور فاصلہ اسے دریافت کرو

(۱۶) ایک شخص سید ہی ٹرک پر جاتا تھا اوسنے یہ دیکھا کہ سب بڑا زاویہ جو دو شیا کے محاذی بناتا تھا سہ تھا جس مقام پر یہ روشنی دیکھتا تھا وہاں سے فاصلہ ط کیا اور ب اوسلو یہ دو شیا ایک ہی نظر آنے لگیں اور اونکی سمت مشترک کے ساتھ زاویہ صہ بناتی تھی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ص}{ب س} = \frac{ب س}{ب س + ص}$$

(۱۷) ایک قلعہ جہاز میں سے سمت مشرق شمال مشرق دکھائی دیا اور جب جہاز سہل مشرق کی طرف گیا تو وہ شمال مشرق کی سمت میں نظر آیا تو ثابت کرو کہ اول اور دوم



اور چھوٹے پہاڑ کا زاویہ ارتفاع جو دوسرے میل کے پتھر پر دیکھا تو وہ صد تہا دونو میناروں کی بلندیاں دریافت کرو

(۲۳) ایک برج کے گرد گول خندق ہے ایک خاص دن دو پہر کو دیکھا کہ ۴۵ فیٹ پستی کے برج کا سایہ پڑا تھا اور جب آفتاب ٹھیک مغرب میں اوسیدن آیا تو سایہ ۱۲۰ فیٹ پستی کے خندق کے کنارہ سے پڑا اور فاصلہ دونوں سایوں کے انجانبوں کے درمیان ۵۴۵ فیٹ تھا اور زاویہ ارتفاع برجی کالب خندق کے ہر مقام پر ۹۰ ہے تو برج کی بلندی اور آفتاب کا ارتفاع دریافت کرو

(۲۴) سطح مایل پر ایک برج ہو اور اس سے مقام (۱) پر لٹکا اور اسی سطح کے مقام (۲) پر اوسے محاذی زاویہ سے بنا ہو اور خط (۱) میں نقطہ (۱) کے س = د = اس اس نقطہ پر برج کے محاذی زاویہ صد تہا ہے اگر برج اور اس کے درمیان زاویہ سر بنا ہو تو ثابت کرو کہ  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  اور اگر اسی طرح مشاہدہ کسی اور خط (۱) کے پر کریں تو یہ دریافت ہوتا ہے  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  اور زاویہ  $\theta$  اس = تو ثابت کرو کہ اگر سطح مایل کا زاویہ میلان ہو تو

جب برج ل =  $\sin \theta$

(۲۵) مثلث (۱) میں معلوم ہے کہ  $\sin \theta = 1$  اور  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  اور  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

مثلث کو حل کرو اور فرض کرو کہ زاویہ (۱) کے مشاہدہ کریں  $\theta$  کی غلطی ہو تو زاویہ  $\theta$  میں تقریباً کیا غلطی واقع ہوگی

(۲۶) ایک دریا کے مقابل کنارہ پر دو چیزوں کے درمیان فاصلہ  $h$  ہو اور دریا کے اس طرف کے کنارہ پر کوئی فاصلہ  $s$  ہو کہیں لیا ہو اور اس فاصلہ کے اطراف پر زاویہ محاذی  $\theta$  کے ساتھ  $\sin \theta$  ہو تو عرض دریا کا دریافت کرو

(۲۷) ایک پہاڑ بہت دور تھا اوسپر ایک مربع قلعہ بنا ہوا تھا ایک شخص کو یہ نظر آیا کہ میں اس قلعہ کا عرض دریافت کروں وہ ایک کونے کے جنوب میں کھڑا تھا وہاں اس کے

مشاہدہ کیا کہ زاویہ نظری قلعہ کے ایک برج کا سہ تھا پر یہ شخص ٹھیک مغرب کو گیا اور جب اپنے پہلے مقام سے ۱۰ فیٹ پہنچا تو اسی برج کا وہی زاویہ نظری نظر آیا اور جب ص فیٹ اور گئے پڑا تو وہ دوسرے گونے کے جنوب میں پہنچ گیا تو ثابت کرو کہ عرض دریا کا

$$(ط + ص) \text{ قسط سر فیٹ ہے اس میں سر } = \frac{ط}{ط + ص}$$

(۲۸) دو پہاڑوں کے درمیان میں اور ب س ایک سرک افقی بنے ہوئے ہیں پس اگر تین پہاڑ کی چوٹی بعد کے پہاڑ کے چوٹی کو چھائی ہوئی سرک کے کسی مقام پر معلوم ہوئی تو ثابت کرو کہ جب سہ جب صہ = جب سہ جب صہ اس میں زاویہ ارتفاع کا سرک کے کسی مقام پر ہے اور زاویہ اب س کا صہ ہی اور سہ اور صہ ہی اسی قبیل کی متاویر چوٹی کے واسطے سرک کے کسی مقام پر سے دکھائی دیتے ہیں

(۲۹) ایک سطح افقی پر دو چیزیں لا اور ب میں اور نقطہ عہ ہی اسی سطح میں ہی چھپ کر محاذی زاویہ سہ دکھائی دیتا ہو اور مقام عہ ہی دو شخصوں میں چلے کہ زاویے قلعے عہ اور عہ ب کے ساتھ بتاتی تھیں اور مقامات ق اور ر پر پہنچے ان مقاموں میں سے ہر ایک مقام پر اب کے محاذی زاویہ سہ بتاتا اور عہ ق اور عہ ر کے فاصلے ط اور ص میں طول اب کا دریافت کرو

(۳۰) مشاہدہ کرنیوالا اور تین چیزیں لا اور ب اور س ایک ہی سطح میں ہیں اس میں ب اور اس اور س ب زاویے قائمے ایک دوسرے کے ساتھ بناتے ہیں نقطہ دیر اس اور س کے محاذی زاویے سہ اور صہ مشاہدہ میں ای اب مشاہدہ کرنیوالا دسے د کے سمت میں ہوں زاویے قائمے س د کے ساتھ بتاتی ہے اور د د = د کے چلا اور یہاں اوسنے د کہا

کہ اس اور ب کے محاذی زاویے سہ اور صہ بنتے ہیں اب کا فاصلہ دریافت کرو (۳۱) ایک شخص دریا کے کنارہ پر کھڑا ہو کر کیا دیکھتا ہے کہ سامنے کے کنارہ پر جو برج بنا ہوا ہے اس کے محاذی زاویہ ۵۵ کا اس خط افقی کے ساتھ بنتا ہی جو اس کی

شالین

باب پانزیم

۱۷۸  
آٹھویں سے لکھا جا چکا ہے وہ ۳۴ فیٹ الٹا تھا تو اس کو زاویہ محاذی برج کے ۸۴° کا نظر آیا  
تو عرض دریا کا دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

$$\text{ل جب } 2 = 9508589 \quad \text{ل جب } 35 = 9545859$$

$$\text{ل جب } 78 = 9584104 \quad \text{لوک } 3 = 524412$$

$$\text{لوک } 150294 = 52089$$

(۳۲) ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور وہ ۵۰ فیٹ بلند ہے اور اس کا سایہ ۷۷ فیٹ لंबا پڑا  
آفتاب کا ارتفاع دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

$$\text{لوک } 2 = 10300 \quad \text{ل کس } 43 = 24997 = 105300$$

$$\text{ل کس } 43 = 24997 = 105300$$

(۳۳) ایک نٹ ۱۰۰ فیٹ بلند برج پر ۱۹۶ فیٹ رسہ کی مدد سے پہنچا چاہتا تھا تو بتا  
اگر وہ اس کام کو کرنے کی توجہ سے کایا زاویہ میلان یعنی دھلان ہوگا اور یہ معلوم ہے کہ

$$\text{لوک } 2 = 10300 \quad \text{ل جب } 30 = 9540461$$

$$\text{لوک } 6 = 584510 \quad \text{ل جب } 71 = 9540482$$

(۳۴) سطح افقی پر زاویہ میلان ۹۰° اور ۴۰° بناتی ہوئی دو پہاڑ ایک ہی مقام تک بلند  
ہوتے ہیں اور انہی پہاڑ پر ایک شے عمود وار قائم ہے اور پہاڑ کے قاعدہ سے ۶۴ فیٹ کے  
فاصلہ زاویے ارتفاع اوس شے کے سر اور پاؤں کے ۴۰° اور ۷۰° کے بنے ہیں تو ارتفاع  
اس شے کا دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

$$\text{ل کس } 20 = 95541659 \quad \text{ل حجم } 70 = 958822500$$

$$\text{لوک } 2 = 10300 \quad \text{ل کس } 70 = 958822500$$

(۳۵) ایک جہاز دوسرے جہاز کے متوازی چلتا تھا اور وہ پہلے جہاز کو شمال سے ۷۵°  
زبط آیا اور جب ایک گنٹہ جہاز چلے اوس کا زاویہ صہ تھا اور بعد ازاں ایک گنٹہ کے بعد پھر

مثال سے تو بتاؤ جہاز کس سمت میں چلے گئے  
(۲۳۶) دفعہ ۲۴ میں جس سوال پر بحث ہوئی تھی اگر اوس میں

$$\text{سہ} + \text{صدہ} + \text{س} = \text{کہ تو سر} = \text{سہ}$$

اور معطیات سے سوال کا حل نہیں ہو سکتا

## سولہواں باب

ثلثوں کے خواص

نہیں

(۲۳۶) اس باب میں منفرد مقامات لکھے جائیں گے اور ان میں سے اکثر ثلثوں کے خواص سے متعلق

(۲۳۷) ثلث کے رقبے کے واسطے کوئی جملہ دریافت کرو

ثلث نصف اوس قائم الزاویہ سے ہوتا ہو جس کا قاعدہ اور ارتفاع برابر ثلث کے قاعدہ اور ارتفاع

کے ہو پس اگر اب اس ثلث ہو اور اسے عمود اسے متقابل کے ضلع پر نکال دیا جائے تو دفعہ ۲۱۴ کی شکلوں سے یہ حاصل ہو گا کہ

$$\text{رقبہ ثلث کا} = \frac{1}{2} \text{ ب س} \cdot \text{اد}$$

$$\text{اد} = \text{اب جب ب}$$

$$\text{اسی واسطے رقبہ ثلث} = \frac{1}{2} \text{ طا طس جب ب}$$

(۱) سے

پس یہ ثابت ہوا کہ قبیلہ کا برابر نصف حاصل ضرب دو ضلعوں اور اون کی درمیانی زاویہ کے جیب

بموجب دفعہ ۱۸ کے جب ب = طا طس ہا [م (م - طا) (م - طب) (م - طس)]

(۱) میں قیمت جب ب کی مندرج کرو تو یہ حاصل ہو گا کہ

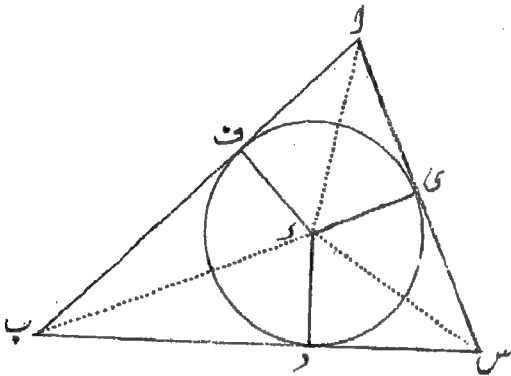
$$\text{رقبہ ثلث کا} = \frac{1}{2} \text{ م (م - طا) (م - طب) (م - طس)} \quad (۲)$$

اگر سب ضلع معلوم ہوتے تو ثلث کے رقبہ کے واسطے یہ جملہ بہت خوب ہے اور اسے آسانی  
حساب ثلث کے رقبہ کا ہو جائیگا

$$\text{بموجب دفعہ ۲۱۴ کے طا} = \frac{\text{طب جب ب}}{\text{طس}} \text{ اور طس} = \frac{\text{طب جب ب}}{\text{جب ب}}$$



ان قیمتوں کو (۱) میں رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ  
 رقبہ مثلث کا =  $\frac{ط \times ب \times ص}{۲}$   
 پس رقبہ مثلث کا اوس حالت میں معلوم ہو جائیگا کہ دو زاویے معلوم ہوں اور ایک ضلع معلوم ہو  
 اس واسطے کہ دو زاویوں کے معلوم ہونے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو جائیگا  
 (۲۴۸) مثلث کے اندر جو دائرہ بنایا جا سکے اوسکا نصف قطر دریافت کرو



فرض کرو کہ 'ا' ب س ایک مثلث معاد اوسکے دائرہ اندرونی کا مرکز ہو اور مثلث اضلاع کو  
 نقاط 'و' اور 'ی' اور 'ز' پر مس کرتا ہو اور دائرہ کا نصف قطر 'نق' ہو تو  
 رقبہ مثلث 'ب س' =  $\frac{۱}{۲} ب س \cdot د = \frac{طاق}{۲}$   
 رقبہ مثلث 'س ا' =  $\frac{۱}{۲} س ا \cdot د = \frac{طبق}{۲}$   
 رقبہ مثلث 'ا ب' =  $\frac{۱}{۲} ا ب \cdot د = \frac{طس}{۲}$   
 اس واسطے جمع کرنے سے

$$(ط ا + ط ب + ط س) \cdot \frac{نق}{۲} = \text{رقبہ مثلث ا ب س} = ص \text{ دفعہ } ۲۴۷$$

$$\text{اس واسطے } نق = \frac{ص}{ط ا + ط ب + ط س}$$

پس نصف قطر دائرہ اندرونی کا اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ رقبہ مثلث کو نصف مجموعہ اضلاع پر  
 تقسیم کریں چونکہ مثلث کے رقبے کے واسطے مختلف جملے ہوتے ہیں اسلئے نصف قطر کے

واسطے بھی مختلف محلے حاصل ہوں گے

(۲۸۹) نق کی قیمت ایک اور صورت کی ہم دریافت کرتی ہیں اور وہ اکثر کام میں آتی ہے  
بحکم (پہلے ۲۴ م) کے خطوط ۱۱ اور ۱۲ اور ۱۳ اور ۱۴ اور ۱۵ اور ۱۶ اور ۱۷ اور ۱۸ اور ۱۹ کے  
تصنیف کرتے ہیں

$$ب د = نق م = اور س د = نق م =$$

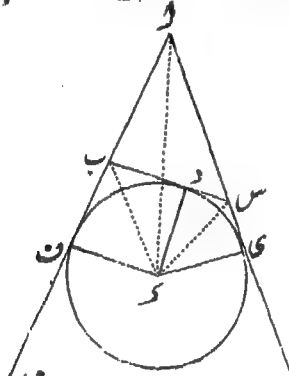
$$اسی واسطے نق (م م) + م = طا$$

$$اسی واسطے نق جب س = س = طا جب س = جب س =$$

$$اسی واسطے نق = طا جب س = طا جب س =$$

نقطہ دریا  
نصف

(۲۹۰) شلت کے ایک ضلع اور دو اضلاع  $\frac{1}{2}$  ممدودہ کو جو دائرہ مس کرتا ہے اور اس کا



فرض کرو کہ اب شلت ہو اور مرکز دائرہ کا ہو جو ضلع ب س اور اضلاع ممدودہ کو  
مس کرتا ہے اور دائرہ کا نصف قطر نق ہے

ذو اربعۃ الاضلاع ب س اور شلتون ک ب اور ک س تقسیم ہوتی ہے اسی واسطے  
رقبہ اس ذو اربعۃ الاضلاع کا  $\frac{1}{2} نق + \frac{1}{2} طا$  نق ہے

اور یہ بھی ذو اربعۃ الاضلاع شلتون ک ب س اور ک س میں تقسیم ہو سکتی ہے  
اسی واسطے رقبہ اس ذو اربعۃ الاضلاع کا  $\frac{1}{2} طا + \frac{1}{2} ص$  ہے

$$\frac{1}{2} طا + \frac{1}{2} نق = \frac{1}{2} طا + \frac{1}{2} ص$$

$$\text{اسی واسطے نق} = \frac{(\text{طس} + \text{طب} - \text{طا})}{2} = \text{ص}$$

$$\text{اسی واسطے نق} = \frac{\text{ص} - \text{طا}}{2}$$

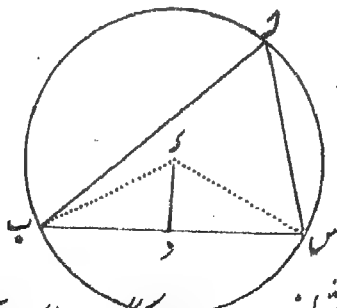
اور علیٰ ہذا القیاس نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہو جو س لہ اور باقی اضلاع محدودہ کو مس کرتا ہے اور نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہے جو اب کو اور اضلاع محدودہ کو مس کرتا ہے

نق =  $\frac{\text{ص} - \text{م}}{2}$  اور نق =  $\frac{\text{ص}}{2}$  م میں جو دائرہ مثلث کے ایک ضلع اور دوسرے اضلاع محدودہ کو مس کرتا ہے اوسکو دائرہ خارجی کہتے ہیں (۲۵۱) مثلث کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر جس طرح دفعہ ۲۴۹ میں دریافت کیا تھا اسی طرح سے نصف قطر دائرہ خارجی کا بھی دریافت ہو سکتا ہے

اسی واسطے کہ شکل دفعہ ۲۵ میں خط رب تنصیف زاویہ کی کرتا ہے اور یہ زاویہ تکملہ کا ہے اور خط رس تنصیف اوس زاویہ کی کرتا ہے جو تکملہ س کا ہے پس ب د = نق م (۹۰ - ب) اور س د = نق م (۹۰ - ب) اسی واسطے نق (س ب + مس ب) = طا

$$\text{اسی واسطے نق} = \frac{\text{طا جم ب} - \text{جم ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ب}} = \frac{\text{طا جم ب} - \text{جم ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ب}}$$

(۲۵۳) مثلث کے گرد جو دائرہ بنایا جائے اوس کا نصف قطر دریافت کرو



فرض کرو کہ اب س مثلث ہے اور اوس کے گرد جو دائرہ بنایا جائے اوس کا مرکز ہے مرکز د ب س رینگلا اور ب س کی تنصیف نقطہ پر بحکم (۲۴۹) کے کرو فرض کرو کہ نق نصف قطر دائرہ کو تعبیر کرتا ہے

باب شانزدہم ۱۸۳  
توزاویہ ب و س دو چند زاویہ ب و س کے اسی واسطے

$$\begin{aligned} \text{ب و د} &= ۱ \\ \text{اور س و د} &= \text{بق جب } ۱ = \frac{\text{طا}}{۲} \\ \text{اسی واسطے بق} &= \frac{\text{طا}}{۲} \end{aligned}$$

پس بق ایک ضلع اور او کے مقابل کے زاویہ کی قیوں میں بیان ہوا ہے  
بوجب دفعہ ۲۱۸ کے جب ۱ =  $\frac{\text{طا}}{۲}$  اس واسطے  
بق =  $\frac{\text{طا}}{۲}$

(۲۵۳) دفعات ۲۲۸ - ۲۵۲ میں بہت سے سائل دائرہ کے باب میں ثابت کر کے لکھے گئے  
مثال کے طور پر اب ہم یہ لکھتے ہیں کہ مثلث کے دائرہ اندرونی اور بیرونی کے مرکوزوں میں کیا فاصلہ  
فرض کرو کہ دائرہ بیرونی کا مرکز د اور دائرہ اندرونی کا مرکز د ہے اور د اور د اور مثلث کی س  
کو نہ میں خطوط طائے گئے ہیں تو

$$\begin{aligned} \text{د و د} &= \text{د س} + \text{د س} - \text{د س} = \text{د س} \\ \text{اب زاویہ د س ب} &= \frac{۱}{۲} \text{ س اور زاویہ د س ب} = ۹۰ - \frac{۱}{۲} \text{ س} \\ \text{جم د س د} &= \text{جم} \left( \frac{۱}{۲} - ۱ - \frac{۱}{۲} \right) \\ &= \text{جم} \left( \frac{۱}{۲} - ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) = \text{جم} \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اور د س} &= \text{بق اور د س} = \frac{\text{بق}}{۲} \\ \text{اس واسطے د د} &= \text{بق} + \frac{\text{بق}}{۲} - \frac{\text{بق}}{۲} = \text{جم} \frac{۱}{۲} \\ \text{بوجب دفعہ ۲۴۹ کے بق} &= \frac{\text{طا}}{۲} \end{aligned}$$

$$\text{بوجب دفعہ ۲۵۲ کے بق} = \frac{\text{طا}}{۲}$$

$$\begin{aligned} \text{اسی واسطے بق} &= \text{جم} \frac{۱}{۲} \\ \text{اسی واسطے د د} &= \text{بق} - \frac{\text{بق}}{۲} = \text{جم} \frac{۱}{۲} - \frac{\text{جم} \frac{۱}{۲}}{۲} = \text{جم} \frac{۱}{۲} \\ \text{بق} - \frac{\text{بق}}{۲} &= \text{جم} \frac{۱}{۲} - \frac{\text{جم} \frac{۱}{۲}}{۲} = \text{جم} \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

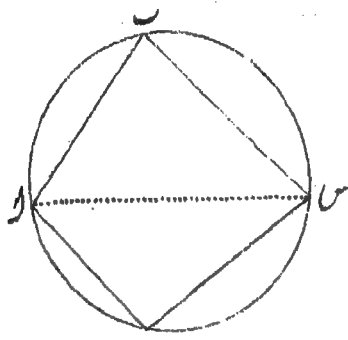
$$= \text{نق} - \text{نق} \text{ نق}$$

$$\text{اسیو اسطے} = \text{نق} - \text{نق} \text{ نق}$$

(۲۵۴) جو ذواربعتہ الاضلاع دائرہ میں کھج کے اوسکا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ اب س د ایک ذواربعتہ الاضلاع

$$\text{اب} = \text{طا} \text{ اور } \text{ب س} = \text{طب} \text{ اور } \text{س د} = \text{طس} \text{ اور } \text{د ا} = \text{طا}$$



شکل دو مثلثوں اب س اور د س تقسیم ہوتی ہے اور اسیواسطے اوسکا رقبہ

$$= \frac{1}{2} (\text{طا ط ب جب ب} + \text{طس ط ب د}) = \frac{1}{2} (\text{طا ط ب} + \text{طس ط د}) \text{ جب ب}$$

کیونکہ زاویے ب اور د یکساں ہیں

اب مثلث اب س میں

$$\text{اوس} = \text{طا} + \text{طب} - \text{طا ط ب جب ب}$$

اور مثلث س د میں

$$\text{اوس} = \text{طس} + \text{طد} - \text{طس ط د جب د} = \text{طس} + \text{طد} + \text{طس ط د جب ب}$$

$$\text{اسیواسطے} \text{طس} + \text{طد} + \text{طس ط د جب ب} = \text{طا} + \text{طب} - \text{طا ط ب جب ب}$$

$$\text{اسیواسطے جب ب} = \frac{\text{طا} + \text{طب} - \text{طس} - \text{طد}}{2}$$

$$\text{اسیواسطے جب ب} = 1 - \frac{(\text{طا} + \text{طد} - \text{طس} - \text{طد})}{2}$$

$$\frac{2}{2} (\text{طا ط ب} + \text{طس ط د} + \text{طد} - \text{طس} - \text{طا} + \text{طب} - \text{طس ط د}) = \frac{2}{2} (\text{طا ط ب} + \text{طس ط د})$$

$$= [ (طس + طد) - (طا - طب) ] [ (طا + طب) - (طس - طد) ]$$

اب فرض کرو کہ  $\frac{1}{2} (طا + طب + طس + طد) = م$  (م = طس + طد)  $\frac{1}{2} (طا - طب) = م$  (م = طس - طد)  $\frac{1}{2} (طا + طب) = م$  (م = طس + طد)  $\frac{1}{2} (طا - طب) = م$  (م = طس - طد)

اسی طرح رقبہ ذواربعہ الاضلاع کا

$$= \frac{1}{2} (م - طا) (م - طب) (م - طس) (م - طد)$$

اگر اس کے بجائیں ہم ب کی قیمت مندرج کرین تو یکو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ا س = طس + طد + طس طد (طا + طب + طس - طد)$$

$$= طس + طد + طس طد (طا + طب + طس - طد)$$

$$= طس طد (طا + طب + طس - طد)$$

اور اس طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$جم = طا + طد - طس طد$$

$$ب د = طس طد (طا + طب + طس - طد)$$

$$طا طد + طس طس$$

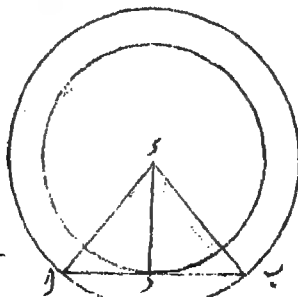
جو دائرہ ذواربعہ الاضلاع پر بنایا جائی اوستا نصف قطر ہی آسانی سے دریافت ہو سکتا

کیونکہ یہہ دائرہ مثلث ا ب س پر گزرتا ہی آے بموجب دفعہ ۲۵۲ کے معلوم ہوتا کہ نصف قطر

$$= \frac{1}{2} [ (طا + طب + طس طد) (طا + طب + طس طد) (طا + طب + طس طد) ]$$

$$(م - طا) (م - طب) (م - طس) (م - طد)$$

(۲۵۵) نقطہ الاضلاع کے اوپر اور اندر جو دائرے بنائی جائیں ان کے نصف قطر دریافت کرو



مشائون کے خواہیں

۱۸۶

باب شانزدہم

فرض کرو کہ ن ضلع کی کثیر الاضلاع منظر کا ایک ضلع اب ہی اور مرکز دائروں کا ہے اور

رد نصف قطر دائرہ اندرونی کا اور د نصف قطر دائرہ بیرونی کا ہے

اور فرض کرو کہ اب = طا اور د = نق اور د = نق

زاویہ اب کان وان حصہ چار قانون کا ہے یعنی

$$اب = \frac{نق}{د} \text{ اور } د = \frac{نق}{کچ}$$

$$د = \frac{طا}{کچ} = نق جب کچ = نق مس کچ$$

$$اسی واسطے نق = کچ اور نق = کچ$$

(۲۵۶) کثیر الاضلاع منظر کا رقبہ نصف قطر دائرہ اندرونی یا بیرونی میں بیان ہو سکتا ہے

اسی واسطے کہ دفعہ ۲۵۵ کی شکل میں رقبہ مثلث اب کا

$$= \frac{۱}{۲} اب . د = \frac{۱}{۲} طا . نق = \frac{۱}{۲} طا . کچ$$

اسی واسطے رقبہ منظر الاضلاع کا =  $\frac{۱}{۲} طا . کچ = نق جب کچ = نق$

اسی واسطے رقبہ منظر الاضلاع کا =  $\frac{۱}{۲} نق . مس کچ = نق مس کچ$

(۲۵۷) دائرہ کا رقبہ دریافت کرو

جس دائرہ کا نصف قطر نق ہو اس کے اوپر ن ضلعی کے منظر الاضلاع کا رقبہ

$$= نق مس کچ = کچ . کچ$$

اب فرض کرو کہ ن بے حد و نہایت زیادہ ہو تو رقبہ منظر الاضلاع کا متواترہ دائرہ کے رقبہ کے

قریب قریب ہوتا جا گیا اور آخر کار دائرہ ہی ہو جا گیا اسی واسطے دائرہ کا رقبہ غایت انتہا

جملہ مذکور کی ہوگی لیکن جب ن بے نہایت زیادہ ہو تو

$$جم کچ = ۱ \text{ اور } کچ = ۱ \text{ بوجہ دفعہ ۱۸ کے}$$

اسی واسطے رقبہ دائرہ کا جس کا نصف قطر نق ہو =  $\frac{۱}{۲} نق$

(۲۵۸) دائرہ کے قطاع کا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ بر مقیاس قوسی قطاع کے زاویہ کا ہے تو

$$\frac{\text{رقبہ قطاع}}{\text{رقبہ دائرہ}} = \frac{\text{جھک}}{\text{دائرہ}}$$

$$\text{اسی واسطے رقبہ قطاع} = \text{دائرہ} \times \frac{\text{جھک}}{\text{دائرہ}} = \text{جھک}$$

چونکہ بر مقیاس قوسی قطاع کے زاویہ کا ہے تو طول قوس کا تقابری ہوگا اس سے معلوم ہوا

کہ رقبہ قطاع کا برابر ہوتا ہے نصف حاصل ضرب طول قوس اور نصف قطر کے

### مثالین

(۱) مثلث متساوی کے اضلاع ۴ اور ۳ اور ۱۸ میں رقبہ اوسکا دریافت کرو

(۲) مثلث کے دو زاویے ۵۰ اور ۶۰ ہیں اور اس کے درمیان ضلع کا طول ان فیٹ ہی رقبہ دریافت کرو

(۳) ایک مثلث کے ضلع ۳ اور ۴ اور ۵ ہیں اور زاویہ درمیانی اوسکا پتہ ہے اوسکے برابر جو مثلث

تساوی اساقین قائم الزاویہ ہو اوسکا وتر دریافت کرو

$$(۴) \text{ رقبہ مثلث کا} = \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{ج} + \text{ب}) \times \text{طب}$$

$$(۵) \text{ رقبہ مثلث کا} = \frac{\text{طا} \times \text{طب} + \text{ج} \times \text{طب} + \text{ب} \times \text{طب}}{2}$$

$$(۶) \text{ رقبہ مثلث کا}$$

$$= \frac{2 \times \text{طا} \times \text{طب}}{\text{طا} + \text{طب} + \text{ج}}$$

(۷) مثلث کے اضلاع متناسب

جھ (ک + ل) اور ک (ج + ہ) اور (جھ + ل) (جھ + ل) (جھ + ل) (جھ + ل)

کے ہوں اوسکا رقبہ اور علم مثلثی نسبتیں اوسکے زاویوں کے منطبق ہوتی ہیں

(۸) ایک مثلث کے ضلع سلسلہ ہندسیہ میں ہیں اور ایک مثلث تساوی الاضلاع ہے

جسکا مجموعہ اضلاع پہلی مثلث کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے اور ان دونوں مثلثوں کے رقبوں

میں نسبت ۳ اور ۵ کی ہے اضلاع کی نسبت اور بڑے زاویہ کی قیمت دریافت کرو



(۹) اگر کسی منظم کے زاویے علی التبادل وصل ہوں اور ایک راس میں منظم پیدا ہو اور ہر اس منظم کے زاویے علی التبادل وصل ہوں اور علی ہذا القیاس تو ثبات کرو کہ اس طرح جو شکلیں پیدا ہو گئیں ان کے رقبوں کا مجموعہ =  $\frac{1}{2}$  اس میں رقبہ اصل شکل کا ہے اور بالعموم اگر شکل کے

$$\text{ن اضلاع ہوں تو مجموعہ} = \frac{\text{و جہ}}{2} \times \text{جہ}$$

اور وہ صورتیں بیان کرو کہ اس میں  $n = 3$  یا  $n = 4$

(۱۰) اگر ایک قائم الزاویہ مثلث مساوی الساقین کے اوپر مثلث مساوی الاضلاع اس طرح بنا جائے کہ اس کے کونے پہلے مثلث کے اضلاع پر ہوں اور ایک ضلع متوازی و متر کا ہو تو اس کا رقبہ

$$= \frac{1}{4} \text{ طا} \times \text{ج} = \frac{1}{4} (\text{ج}^2) \text{ ہوگا}$$

اس میں طا ایک ضلع مثلث معلوم کا ہے

(۱۱) دو نقطوں کے درمیان فاصلہ ط ہی ہو اور انکی فاصلے ایک خط معلوم سے ط ب ط ہیں تو تمام مثلثوں میں سے جنکا قاعدہ ط ہی ہو اور جنکے راس خط معلوم پر واقع ہوں تو جس مثلث کا زاویہ راس سب سے بڑا ہوگا اس کا رقبہ  $\frac{1}{4} \text{ طا} \times \text{ج}$  ہوگا

(۱۲) مثلث اب س کے زاویوں ۱ اور ۲ کی جو خطوط مستقیم تقسیم کرتے ہیں اور دائرہ بیرونی کے محیط سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملے ہیں تو ثبات کرو کہ اس ایسے تین حصوں میں س ب اور ب ۱ سے تقسیم ہوگا جنہیں تناسب

$$\text{ج ب} : \text{ب} : \text{ج} = \text{ج ب} : \text{ب} : \text{ج} \text{ ہوگا}$$

(۱۳) اگر مثلث قائم الزاویہ کے زاویہ قائمہ کے اضلاع کے درمیان تفاوت سے ہوا اور اس کا رقبہ ہو تو قطر دائرہ بیرونی مثلث کا  $\frac{1}{2} \text{ طا} + \frac{1}{2} \text{ ج}^2$  ہوگا

(۱۴) ایک مثلث مستوی کے اضلاع ۳ و ۴ و ۵ میں اس کے اندرونی اور بیرونی دائروں نصف قطروں میں نسبت دریافت کرو

باب شانزدہم کے گرد جو دائرہ بنایا جائے اس کا مرکز ہے اور اسے خارج ہو کر بننے سے  
(۱۵) مثلث کے گرد جو دائرہ بنایا جائے اس کا مرکز ہے اور اسے خارج ہو کر بننے سے  
نقطہ درپہا ہے تو ثابت کرو کہ

(۱۶) ایک مثلث معلوم کردائرہ بنایا گیا ہے اور نقاط ٹاس میں خطوط وصل کر کے ایک دائرہ  
بنایا ہے اور پھر اس آخر مثلث میں ایک دائرہ بنایا ہے اور اس کے اندر پہلی طرح سے مثلث بنایا  
اور علیٰ ہذا القیاس لگے بھی یہی سلسلہ جاری ہی تو ثابت کرو کہ مثلث اس طرح سے آخر کار مثلث  
متساوی الاضلاع ہو جائیگا

(۱۷) مثلث متساوی کے اندر اور باہر جو دائرہ بنایا جائے اس کے قطروں کا مجموعہ  
طام ۱ + طب ۱ + طم ۱ + طس ۱ = طم ۱ + طس ۱

(۱۸) مثلث کے اضلاع پر زواہیوں ۱ اور ۲ اور ۳ کے مقابل کے ضلعوں پر عمود کا  
اور انکو دو ایریرونی تک خارج کیا ہے اگر چھ حصے مدد دہ سہ حصہ وار ہوں تو ثابت کرو کہ  
 $\frac{ط۱}{ط۲} + \frac{ط۲}{ط۳} + \frac{ط۳}{ط۱} = ۲$  (مس ۱ + مس ۲ + مس ۳)

(۱۹) مثلث ۱ ب س میں ایک دائرہ بنایا گیا ہے اور پھر چھوٹے چھوٹے دائرے مثلث کے ضلعوں  
اور اس دائرہ کو سس کرتے ہوئے کچے گئے ہیں تو ان کے نصف قطر دریافت کرو  
(۲۰) ہر مثلث میں مثلث کے رقبہ اور اس کے دائرہ اندرونی کے رقبہ میں نسبت ہوتی ہے  
جو کہ کو ۱/۲ م ۱/۲ م ۱/۲ م سے نسبت ہے

(۲۱) مثلث حادہ الزوایا کے اضلاع میں سے ہر ایک ضلع پر مثلث متساوی الساقین بنایا  
اور ہر ایک کے ضلع برابر نصف قطر دائرہ بیرونی کے ہیں اگر ان کے راسوں میں خطوط کو ملائیں  
تو ایک مثلث متساوی الاضلاع مثلث کے بنے گا

(۲۲) اگر کسی مثلث کے دائرہ بیرونی کا نصف قطر تق ہو تو

طام ۱ + طب ۱ + طم ۱ + طس ۱ = ۲ لی جب ۱ جب ۲ جب ۳

(۲۳) مثلث ۱ ب س کے گرد جو دائرہ بنایا جائے اس کا مرکز ہے اور اسے خارج ہو کر بننے سے

اور سی اور سی و عمود اضلاع پر نکالے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ  
 (۲۳)  $(د + د + سی + سی) = ط + جم + ط + ط + ط + ط + ط + ط$   
 اگر مثلث کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر نق ہو اور نق و اور نق ب اور نق نصف قطر  
 اون دائروں کے ہوں جو اس دائرہ کو اور اون اضلاع کو جو محیط زاویہ ا اور ب اور س  
 ہیں کیجے جائیں تو ثابت کرو کہ

(۲۴)  $\frac{1}{نق} = \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} + \frac{1}{نق}$   
 مثلث کا قاعدہ جن دو حصوں میں دائرہ اندرونی کے نقطہ تماس سے تقسیم ہوتا ہے وہ  
 تو دائرہ اندرونی کے نصف قطر کی قیمت بڑی سے بڑی دریافت کرو  
 (۲۵) اگر ا اور ب اور س سے مثلث کے مقابل اضلاع پر عمود نکالیں اور مواقع عمودوں  
 میں خطوط وصل کریں تو ثابت کرو کہ  $س = نق + جب ۲$   
 اسمیں نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو مثلث ا ب س کے اوپر بنایا جائے  
 (۲۶) مثلث کے زاویوں کے جو عمود مقابل کے ضلعوں پر نکالے جائیں اور وہ اضلاع کے نقاط  
 داوری اور پ پر ملیں تو ثابت کرو کہ اگر نق اور نق نصف قطر اون دائروں کے ہوں جو مثلث  
 ا ب س اور دیات پر کیجے جائیں اور نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہو جو اخر مثلث کے  
 اندر بنایا جائے تو

نق =  $\frac{1}{2}$  نق اور نق =  $\frac{1}{2}$  نق جم و جم ب جم س  
 (۲۷) اگر مثلث کے دائرہ اندرونی اور دوائر خارجی کے نصف قطر نق اور نق اور نق ہوں تو ثابت کرو کہ

مس =  $\frac{1}{2}$  نق =  $\frac{1}{2}$  نق  
 (۲۸) اگر مثلث کے دائرہ اندرونی کا رقبہ ا ہو اور دوائر خارجی کے رقبہ ا اور ا اور ا ہو تو

$$\frac{1}{ا} + \frac{1}{ا} + \frac{1}{ا} = \frac{1}{ا}$$

(۳۰) اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ جاریہ میں ہوں تو اس کے ضلع پر مقابل کے ضلع سے جو عمود نکال جائے وہ ا نصف قطر اوس دائرہ کا جو اس بیچ کے ضلع اور باقی دو اضلاع مجموعہ سے گزرتا ہی دونوں ملکر برابر ہے نصف قطر مثلث سے دائرہ اندرونی سے ہونگے

(۳۱) مثلث کے دو دائرہ خارجی کے مرکزوں کے مرکز دائرہ اندرونی کے فاصلوں میں نسبت جب  $\frac{1}{2}$  جب  $\frac{1}{3}$  اور جب  $\frac{1}{4}$  کی بھی ہوتی ہے

(۳۲) دو متشابه مثلثوں کا دائرہ خارجی مشترک ہی اور اضلاع غیر متناظرہ طام اور طب کا سر کرتا ہے تو ثبات کرو کہ

طام : طام = جب ب + جب س - جب ا : جب ا + جب س - جب ب

(۳۳) اگر کم اور کم مرکز دو دائرہ خارجی مثلث کے ہیں تو رقبہ مثلث کم کم کم کا

$$= \text{رقبہ مثلث ا ب س} \left[ \frac{ا + طب + طس - طا}{طب + طس - طا} + \frac{طا + طس - طب}{طا + طس - طب} + \frac{طس + طاب - طس}{طس + طاب - طس} \right]$$

(۳۴) ایک مثلث کے دو دائرہ خارجی کے مرکزوں میں خطوط وصل کئے ہیں تو ثبات کرو کہ اس طرح جو

مثلث پیدا ہوگا اوس کا رقبہ  $\frac{طام + طس}{2}$  ہوگا اس میں نق نصف قطر دائرہ اندرونی کا

(۳۵) اگر مثلث کے دو دائرہ خارجی کے مرکزوں اور ب اور س ہوں اور خطوط ا اور ب اور س

میں ملائیں اور ا ب س اور ا ب س میں جو دائری بنائیں اونکی نصف قطر نق اور نق ہوں

$$\frac{نق}{نق} = \frac{مم + مم + مم}{مم + مم + مم}$$

(۳۶) اگر مثلث ا ب س کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر نق ہو اور مجموعہ اضلاع ۲ مم ہو اور

دو دائرہ خارجی کی مرکزوں میں خطوط ملائے سے جو مثلث پیدا ہو اوس کے دائرہ اندرونی کا نصف

قطر نق اور مجموعہ اضلاع ۲ مم ہو تو ثبات کرو کہ

$$\frac{نق}{نق} = \frac{مم + مم + مم}{مم + مم + مم}$$

(۳۷) اگر مثلث کے مرکز ا و ب کا بعد دائرہ اندرونی کے مرکز سے سہ اور سہ ہو اور جو



شالین

باب شانزہم

۱۹۳

اگر ترقی نصف قطر دائرہ بیرونی کا ہو جو مثلث اب س پر کھایا جائے تو ثابت کرو کہ  

$$\frac{\text{نق} + \text{نق} + \text{نق}}{\text{طاب} + \text{طاب} + \text{طاب}} = \frac{\text{نق}}{\text{طاب}} + \frac{\text{نق}}{\text{طاب}} + \frac{\text{نق}}{\text{طاب}}$$

(۴۱) ایک نقطہ کا مثلث کے اندر یا پر ہے اور کوع ا اور ع ب اور ع س عمود ضلع اب س اور  
 س و اور اب پر نکالے گئے پہلے دائرہ مثلث ع اب اور ع ب س اور ع س و پر کھینچے گئے ہوں  
 تو ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا جو مرکزوں میں خطوط طانے سے وصل ہوتا ہے ایک چوتھائی مثلث  
 اب س کے رقبہ سے ہے

(۴۲) تین دائرے آپس میں باہر کی طرف مس کرتے ہیں تو اوائل مرکزوں میں خطوط وصل کرنے  
 جو مثلث پیدا ہوگا اس کے رقبہ کا مربع برابر ہوگا اس کے حاصل ضرب کے جو اوائل نصف قطروں کے مجموعہ کے  
 قطروں کے حاصل ضرب میں ضرب دینے سے پیدا ہوگا

(۴۳) اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور زاویوں کے عمود متقابل کے ضلعوں پر  
 نکالے جائیں اور انکو ضلع ایک مثلث کے بنائیں تو اس نئے مثلث کے زاویے برابر اصل مثلث کے  
 زاویوں کے ہوں گے

(۴۴) مثلث کے زاویوں اب س سے جو عمود متقابل کے ضلعوں پر نکالے جائیں اور ضلع طاب  
 اور س اور ان عمودوں کی نسبتیں سہ حصہ درہوں تو سہ حصہ + لکڑہ + (سہ حصہ + لکڑہ + لکڑہ) = ۴۰

(۴۵) کسی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{طس}}{\text{طاب}} = \frac{\text{طاب}}{\text{طاب}} = \frac{\text{طاب}}{\text{طاب}} = \frac{\text{طاب}}{\text{طاب}}$$

(۴۶) دو ضلع مثلث کے ۶۵ اور ۲۵ ہیں اور ان ضلعوں کے مقابل کے زاویوں کا تفاوت  
 ۶۰ ہے تمام زاویے دریافت کرو اور یہ معلوم ہے کہ

$$\text{لوک } ۳ = ۱۳۱۲۷۷۷۷ \quad \text{لوک } ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$$

ل س ۵۲ = ۲۷۰۸۱۱۳۱۰ ل س ۲۵ = ۱۱۳۱۱۳۱۰  
 (۴۷) اگر مثلث کے زاویوں کے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ضلع

باب شانزدہم . . . ۱۹۴  
 جو مواقع عمودین میں خطوط کا بننا ہے اور طے طاجم اور طے جیب اور طے عم

ہیں اور اسے ثابت کرو کہ طاجم ۱ - طے جیب طے عم = جم ۱  
 (۴۸) ایک مثلث کے کونوں اور تین دائرہ خارجہ کے امین جہہ دائرے بنائے گئے ہیں ہر ایک  
 ضلع منہ و مدہ کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ ان کے علی التبادل نصف قطر کے حاصل ضرب پانچواں  
 (۴۹) اگر مثلث کے دائرہ بیرونی کا نصف قطر فی ہوا اور ب نصف قطر دائرہ خارجہ ہو تو ان دائروں

کے مرکروں کا فاصلہ  $\frac{1}{2}(a + b + c)$  ہوگا  
 (۵۰) مثلث کے زاویوں اور ب اور س سے کسی نقطے تک خطوط کچے گئے ہیں اور مثلث کے قضا  
 کے ضلعوں کے نقاط اور ب اور س پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ

ب . ب . س . س ا = ا . س . ب ا . س ب  
 (۵۱) ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع پر جو برتھال کے زاویوں کے عمود نکالتے ہیں وہ ایک نقطہ پر ملتے  
 (۵۲) ثابت کرو کہ مثلث کے داخلی زاویوں کی جو خطوط ترصیف کرتے ہیں وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں  
 (۵۳) اضلاع مثلث کے نقاط وسط اور مقابل کے زاویوں میں جو خطوط وصل تھیں ان کے نقطہ پر ملتے ہیں  
 (۵۴) جن نقاط پر دائرہ اندرونی مثلث کے اضلاع کو مس کرتا ہے ان میں اور مقابل کے زاویوں  
 جو خطوط وصل کئے جائیں وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں

(۵۵) ایک ذرا رباعی الاضلاع ایسی فرض کی جی کہ اس کے اندر اور اوپر دائرے بن سکے ہیں اور اس کے  
 اضلاع دو دو طرف برائے گئے ہیں اور نق اور نق نصف قطر اون دائروں کے ہیں جو اون  
 مثلثوں میں کہ دو ضلعوں پر بنے کچے جائیں اور نق اور نق اون دائرہ خارجہ نصف قطر ہیں  
 چاروں اضلاع منہ و مدہ اندرونی نق و نق ب نق س ی د = نق اور نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو

## ستہواں باب

ساوا توں کل کر نہیں زوایا مستحکم استعمال کی کیفیت اور صورتانویہ جبر یہ کو کو کارشم کے قابل بننا کا حال

(۲۵۹) اب یہ بیان کرتے ہیں علم منسلق جلوں کی جدولوں کی کس طرح مساوات درجہ دوم کی عددی قیمتیں دریافت کرتے ہیں

(۱) فرض کرو کہ یہ مساوات ہو

$$لا - ع + ق = ۰$$

اسمیں ع اور ق دونو مثبت ہیں اس مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = ع \pm \sqrt{ع(ع - ق)} \quad [1 \pm \sqrt{ع(ع - ق)}]$$

اب اگر ق کم قیمت سے ہے تو  $\frac{ق}{ع} =$  جب بر کے فرض کرو تو

$$لا = ع (1 \pm \sqrt{ع(ع - ق)})$$

اگر ق بڑا سے ہو تو قیمتیں مساوات کی ناممکن ہو جائیں گی تو ہم کو یہ فرض کرنا چاہیے کہ

$$\frac{ق}{ع} = \text{قطر}$$

$$لا = ع [1 \pm \sqrt{ع(ع - ق)}]$$

(۲) اب فرض کرو کہ مساوات یہ ہو کہ

$$لا - ع - ق = ۰$$

اسمیں ع اور ق دونو مثبت ہیں تو اس مساوات سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = ع \pm \sqrt{ع(ع + ق)} \quad [1 \pm \sqrt{ع(ع + ق)}]$$

اب فرض کرو کہ مس = بر =  $\frac{ق}{ع}$  تو

$$لا = ع (1 \pm \sqrt{ع(ع + ق)})$$

$$= \frac{ع}{ع} \pm \sqrt{ع(ع + ق)}$$

(۳) اگر مساوات اس صورت  $لا + ع + ق = ۰$  کے ہو اسمیں ع اور ق

مثبت ہوں تو اس مساوات  $لا - ع - ق = ۰$  حل کرو اور جو قیمتیں حاصل ہوں

اونکی علامتیں بدل دو تو موجب دفعہ ۲۴ کے قیمتیں مطلوب حاصل ہر جائیں گی



(۲۶) اگر مساوات اس صورت لاء  $2 + 3 = 5$  ق = ۰ آئین ع اور ق مثبت ہیں تو ہم مساوات لاء  $3 = 5$  کو حل کر سکتے ہیں اور اسے جو قیمتیں حاصل ہوں اونکی علامتیں بدل دیں تو قیمتیں مطلوب حاصل ہو جائیں گی

(۲۷) اس طرح سے مساوات درجہ سوم یعنی تیسری مساوات کی عددی قیمتیں باعانت جدول علم اشاری جملوں کے حاصل ہو سکتی ہیں ہم اسکی ایک صورت مثال دیکر لکھتے ہیں

فرض کرو کہ مساوات لاء  $3 = 5$  ہو اور  $2 + 3 = 5$  ہو

تو لاء  $3 = 5$  کے رکھو تو

$$3 = 5 - 2 = 3$$

$$3 = 5 - 2 = 3$$

$$3 = 5 - 2 = 3$$

$$3 = 5 - 2 = 3$$

$$3 = 5 - 2 = 3$$

اخر مساوات سے ۳ سے دریافت ہوتا ہے اور اسے سے معلوم ہوتا ہے تو

$$3 = 5 - 2 = 3$$

اور قیمت ۳ سے کی چھوٹی نسبت واحد کے ہے کیونکہ ہم ۲ کو چھوٹا ہم ق سے فرض کیا ہے

اب یہ دفعہ ۱۰ سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ

$$3 = 5 - 2 = 3$$

جملوں کی  
درجہ سوم کی

اور یہ بالکل موافق اس جم ۳ سے کے ہے جو اوپر بیان ہوا پس آخر کار یہ قیمتیں مساوات

$$3 = 5 - 2 = 3$$

$$3 = 5 - 2 = 3$$

یہ میں اگر مساوات درجہ دوم سوم مثل دفعات سابق کے حل کرنے کے لئے پیش  
ان کی استعانت عددی قیمتیں جدول کی اسانی کیلئے کر سکتے ہیں





زاویہ نظری ایک ہی جاتا تھا اگر ص بلندی معلوم سر کی ہو تو علم کے ارتفاع ح کو ص اور ط کی رفون میں بیان کرو اور اگر برج کی بلندی میں بقدر ص کی غلطی واقع ہو اور اس علم کی بلندی میں بقدر ر کے غلطی ہوگا تو ثابت ہوگا

$$\frac{1}{\text{ص}} = \left[ 1 + \frac{\text{ص} \times \text{ط}}{\text{ص} - \text{ط}} \right]$$

(۱) ایک مثلث کا ایک ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ نامعلوم ہیں تو ثابت کرو اور ضلع اور ص کی خفیف غلطیوں کے یہ ارتباط قائم ہوتا ہے کہ

(۱۲) ایک مینار سلطانہ کی شکل کا گول ہے اور اس کا عرض اور ارتفاع قوسی سے اور ص ہے اور مینار قریب تر و فیٹ پر زاویہ ارتفاع اور عرض سے اور ص ہے تو بلندی اور نصف قطر مینار کا دریا معلوم ہوگا اور جو ارتباط سے اور ص اور ص کے درمیان ہو اس سے معلوم کرو

(۱۳) اسے پہلے سوال میں اگر عرض قوسی میں غلطی فر کی ہوگا اور نصف قطر قوسی کے حساب پر نہیں ہوگا بڑی غلطی ہو تو ثابت کرو کہ ب اس مساوات سے معلوم ہو جائیگا

$\frac{1}{\text{ق}} = \frac{\text{م}}{\text{م} - \text{ص}} \left[ \frac{\text{م}}{\text{م} - \text{ص}} - \frac{\text{م}}{\text{م} - \text{ص}} \right]$  فر اگر ص = ۶۰ اور ص = ۱۲۰ اور فر = ۴ نصف قطر کے حساب نگاہ میں جو سب سے بڑی غلطی واقع ہوگی اس کی نسبت نصف قطر سے بتلاؤ

(۱۴) ع اور ق اور ر مقامات معلوم ایک خط استقیم میں ہیں اور خاص نقطہ کے ع ق اور ر کے محاذی برابر زاویے بنتے ہیں اگر شاہدہ کی ہوئی زاویوں میں چھوٹی سی غلطی واقع ہوگی اس کے واقع ہو تو بڑی غلطی ص اور ق کے درمیان فاصلہ کی کیا ہوگی

## اٹھارہواں باب

معلوم محل علم مثلثی

(۲۶۳) مساوات جب لا = ط سے یہ سمجھا جاتا ہے کہ لا وہ زاویہ جسکی جیب ط ہے اس ارتباط کو ایک اور طریقہ سے بھی لکھتے ہیں اور اس میں صرف لہی قائم رہتا ہے اور بڑی آسانی

اوسمین ہوئی اور وہ طریقہ کتاب یہ ہے کہ لا = جب ا ط اور ایسی ہی لا = ح ط سے یہ سمجھا جاتا ہے کہ لا وہ تراویح جسکی جیب التمام ط ہے اور لا = مس ا ط سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ لا وہ تراویح ہے جسکا حماس ط ہے اور علی ہذا القیاس

(۲۶۴) تجربہ سے یہ بات ثابت ہوگی کہ اس طریقہ کتاب کے اختیار کرنے میں سہیل کے اور یہ بھی ثابت کرینگے کہ اس طریقہ کتاب میں جو ۱ رفوت نامی طرح کام میں آتی ہے وہ یونہیں خواہ مخواہ نہیں مقرر کرتی بلکہ اوسکی اصلی اور نفس الامری معنی ہی ایسے ہیں جو ۱ کے معنی طرح لکھنے سے ہوتی ہیں اب ہم کتاب کو ثابت کرتے ہیں فرض کرو کہ لا کا جملہ ح (لا) سے تعبیر کیا جائے تو وہی جملہ ح (لا) کا [ح لا] سے تعبیر ہوگا اور اوسکو آسانی سے ح (لا) تعبیر کر سکتے ہیں مثلاً لو کارٹم لکی لو کارٹم لینی تو اوسکو لوک لا سے تعبیر کرنے میں سہیل کے اور ایسی ہی ح [ح] [ح لا] کو اختصار کو آسانی کے واسطے ح (لا) سے تعبیر کریں اور علی ہذا القیاس پس جو جیس طریقہ کتابت کہ ہم اور نیشن میں

$$۶ ۷ (لا) = ح ۴ (لا)$$

اب امتحان کر کے یہ بتلاتے ہیں کہ خ (لا) کے کیا معنی پیدا ہوں کہ ارتباط مذکور اس حالت پر یہی صادق آئی کہ م بیان صفر ہو فرض کرو کہ = ۰ تو ارتباط مذکور یہ ہو جائیگا کہ

$$ح ۱ خ (لا) = ح ۴ (لا)$$

اسے یہ فیصلہ ہوتا ہے کہ خ (لا) برابر لا کے خیال ہو سکتا ہے

اب ہم امتحان کر کے یہ بتلاتے ہیں کہ ح ۱ (لا) کے کیا معنی لئے جائیں کہ ارتباط مذکور

$$ح ۴ ح ۱ (لا) = ح ۴ ح ۴ (لا) \text{ اوس حالت پر یہی صادق اوی کہ م بیان } ۱ - \text{ ہو}$$

فرض کرو کہ م = ۱ اور ن = ۱ تو ارتباط مذکور کی یہ صورت ہوگی کہ

$$ح ۴ ح ۱ (لا) = ح ۴ ح ۴ (لا) = لا$$

پس ح ۱ (لا) وہ مقدار تعبیر ہوتی ہے جسکا جملہ ح لا ہے

پس جب لا اوس مقدار کو تعبیر کرتے ہیں جسکی جیب لا ہے اور یہی معنی ہے اس رمز کے بتلائی ہوئی

اب اس بیان کے مطابق ضرور ہے کہ جب لا کے قیمت جب (جب لا) ہو اور یہ معنی اس کی نہیں  
کہ جب لا جب لا لیکن اس جیسے کہ جب (جب لا) ایسا جملہ ہے کہ شاذ و نادر واقع ہوتا ہے اس لیے  
عادت یوں پڑ گئی ہے کہ جب لا کو بجایا دس مقدار کے جو (جب لا) سے جو ہوتی ہے استعمال  
کرتے ہیں

(۲۶۵) جو ارتباط کہ علم شافی جملوں میں قائم ہوا اور معکوس جملوں میں بیان ہو سکتا ہے مثلاً اگر معلوم ہے کہ

$$\text{مس ۲ بر} = \frac{\text{مس ۲}}{\text{مس ۱ بر}}$$

اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{بر} = \text{مس ۱} = \frac{\text{مس ۲}}{\text{مس ۱ بر}}$$

فرض کرو کہ مس بر = ط تو بر = مس ۱ ط پس

$$\text{مس ۱ ط} = \text{مس ۱} = \frac{\text{ط ۲}}{\text{ط ۱}}$$

اور علیٰ نذا القیاس جب ۳ بر = ۳ جب بر - ۴ جب بر کو اس طرح بھی تعبیر کر سکتے ہیں

$$۳ \text{ جب ۱ ط} = \text{جب ۱} = (ط ۳ - ط ۴)$$

### مثالین

(۱) ثابت کرو کہ مس ۱ = ۲ = مس ۱ ط

(۲) جب (جب ۱ ط + جم ۱ ط) کی قیمت دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ جب ۱ = ۴ = جب ۱ - ۳ + جب ۱ ط

(۴) مس (مس ۱ لا + جم ۱ لا) کی قیمت دریافت کرو

(۵) مس ۱ ط + مس ۱ لا + مس ۱ ص + مس ۱ ط = ۱ = ۱

(۶) ثابت کرو کہ مس ۱ ط = مس ۱ ط + مس ۱ ص + مس ۱ ط + مس ۱ ص + مس ۱ ط

(۷) مس ۱ ط + مس ۱ لا + مس ۱ ص + مس ۱ ط - ۱ = ۱ کا دریافت کرو

(۸) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 [1 + 3h] \text{مس}^1 [1 - 3h] \text{مس}^1 = \text{مس}^1 (\text{جی}^1 \text{سه})$$

$$(9) \text{ اگر مس}^1 (\text{سه} - 2) \text{مس}^1 (5 - \text{سه}) = \text{مس}^1 \text{جی}^1 \text{تو}$$

$$\text{بر} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{جی}^1 \text{سه} \text{جی}^1 \text{سه} = \frac{1}{3} \text{جی}^1 (\text{سه} + \text{سه})$$

$$(10) \text{ ثابت کرو کہ جی}^1 \text{ا} = \frac{4}{(8r)} + \frac{1}{2} \text{جی}^1 \text{ا} = \frac{4}{(8r)} = \frac{1}{2} \text{جی}^1 \text{ا}$$

$$(11) \text{ ثابت کرو کہ جی}^1 \text{ا} = \frac{1}{6} \text{جی}^1 \text{ا} + \frac{5}{12} \text{جی}^1 \text{ا} + \frac{1}{6} \text{جی}^1 \text{ا} = \frac{1}{6} \text{جی}^1 \text{ا}$$

$$(12) \text{ ثابت کرو کہ مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(13) \text{ ثابت کرو کہ مس}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(14) \text{ ثابت کرو کہ مس}^1 (\text{مس}^1 \text{ا}) = \text{مس}^1 (\text{مس}^1 \text{ا} + \text{مس}^1 \text{ا})$$

$$(15) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\text{مس}^1 (\frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا}) + \text{مس}^1 (\text{مس}^1 \text{ا}) + \text{مس}^1 (\text{جی}^1 \text{ا}) = 0$$

$$(16) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{2r}{3h} \text{مس}^1 (\text{جی}^1 \text{ا} + \frac{1}{3} \text{جی}^1 \text{ا}) + \text{مس}^1 (\text{جی}^1 \text{ا} - \frac{1}{3} \text{جی}^1 \text{ا}) = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(17) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{2r}{3h} \text{جی}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$\text{ان سات مساواتوں کو حل کرو}$$

$$(18) \text{ جی}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{جی}^1 \text{ا} + \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(19) \text{ جی}^1 \text{ا} = \frac{2r}{3h} \text{جی}^1 \text{ا} + \frac{2r}{3h} \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(20) \text{ مس}^1 \text{ا} = (1 - 1) \text{مس}^1 \text{ا} + \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(21) \text{ جی}^1 \text{ا} = \text{جی}^1 \text{ا} = \text{جی}^1 \text{ا}$$

$$(22) \text{ مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$(23) \text{ جی}^1 \text{ا} = \text{جی}^1 \text{ا} = \text{جی}^1 \text{ا}$$

$$(24) \text{ مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} + \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{1}{3} \text{مس}^1 \text{ا}$$

(۲۵) اگر قطب بر قمر = یک تو ثابت کرو کہ بر =  $\frac{1}{2}$  جب  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   
 (۲۶) اگر جب (کہ جم بر) = حم (کہ جب بر) تو ثابت کرو کہ بر =  $\pm \frac{1}{2}$  حت  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   
 (۲۷) اگر جب بر + جب سر =  $\frac{1}{2}$  تو ثابت کرو کہ مر کی قیمتیں میں ایک قیمت (۲۷+۲۸) ہے  
 مساوات ذیل کی شرائط کو پورا کرتی ہے

بر = جب ا (جب بر + جب سر) + جب ا (جب بر - جب سر)  
 (۲۸) لاکھ ان مساواتوں سے دریافت کرو

$\frac{1}{2}$  مس ا -  $\frac{1}{2}$  مس ا = مس ا  
 (۲۹) ثابت کرو کہ ان جملوں میں سے ایک

جب ا =  $\frac{2}{ط+ص}$  + ط - ص  $\pm$  ۲ حت ا  $\frac{ط+ص}{ط+ص}$   
 ایک طاق اضعاف کے کا ہے

(۳۰) سب صحیح ثابت حل اس مساوات کے دریافت کرو کہ

مس ا ل + مس ا  $\frac{1}{2}$  = مس ا ۳  
 (۳۱) ثابت کرو کہ اگر ج ایک مثبت صحیح ہو تو مساوات

مس ا ل + مس ا ۵ = مس ا ج  
 کوئی مثبت صحیح حل نہ ہوگا اور مساوات

مس ا ل + مس ا  $\frac{1}{2}$  = مس ا ج

کے اتنے مثبت حل ہونگے جتنی ا ج کے مختلف تقسیم کرنے والے ہونگے

(۳۲) ثابت کرو کہ مس ا ل = مس ا ج ل + ۲ = مس ا ج ۲ ج + ۱  
 مس ا ج ۲ ج + ۱

اس میں ج اور ج ۲ ۰ ۰ ۰ ج وغیرہ خواہ کچھ ہی مقدار ہوں  
 (۳۳) مجموعہ کتنے ایک زاویوں

جب ا ۲ ط ص اور جب ا ۲ ط ص  
 کا . . . . .



باب نوزدہم میں بیان ہو سکتا ہے کہ

اس صورت میں بیان ہو سکتا ہے کہ  
جب  $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$   
اسمیں  $m$  اور  $n$  یا  $p$  کے طے اور  $p$  اور  $n$  کے طے اور  $m$  کے طے  
(۲۴۴) جب  $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$  کی عام قیمت لکھو اسمیں  $m$  ایک صحیح ہے  
(۲۴۵) عام قیمت  $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$  کی لکھو اسمیں  $m$  ایک صحیح ہے

## اونیسواں باب

فصا بطہ دی موٹور

(۲۴۶) جبر مقابلہ میں طالب علموں نے ایسی پرکھی کہ منفی مقدار کا جذر ایک ناممکن عمل کی علامت ہے  
مگر یہی ایسے جذر سے تحقیقات ریاضیہ میں بہت کام چل چکا ہے جن اکثر باتفاق جمہور یہاں  
تسلیم کیا گیا ہے کہ

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

اور جملہ قوانین جبر یہ تبدیل صورت کے جملہ  $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$  پر متصرف ہیں اب اس باقی کتاب میں  
 $\sqrt{-1}$  اکثر واقع ہوگا اور ابتداء میں تسلیم کر لیتے ہیں کہ یہ خیالی جملہ  $\sqrt{-1}$  کا مثل ایک اصلی جملہ ہے  
اور اس پر تمام اعمال جبر کو سیرج متصرف ہیں جس طرح اصلی جملوں پر ہوتے ہیں اور یہ جو اثبات  
رض  $\sqrt{-1}$  پر موقوف ہونگے ان کے استحکام کو دیکھ لادینگے پچیسواں باب جبر مقابلہ کا دیکھو  
(۱۶۷) فصا بطہ موٹور خواہ  $n$  مثبت ہو خواہ منفی خواہ صحیح خواہ کسر غرض سب صورتوں میں

جم  $n$  بر  $+$   $\sqrt{-1}$  جب  $n$  بر ایک قیمت [جم بر  $+$   $\sqrt{-1}$  جم بر  $+$   $\sqrt{-1}$  کے قیمتوں میں ہے  
جم صہ بر  $+$   $\sqrt{-1}$  جب صہ کو جم صہ  $+$   $\sqrt{-1}$  جب صہ میں ضرب دو تو حاصل ضرب

جم صہ جم صہ  $-$  جب صہ جب صہ  $+$   $\sqrt{-1}$  جب صہ جم صہ  $+$  جم صہ جب صہ  
یعنی جم  $(صہ + صہ) + \sqrt{-1}$  جب  $(صہ + صہ)$

اب پھر اس جملہ کو جم ل  $+$   $\sqrt{-1}$  جب ل میں ضرب دو تو حاصل ضرب

جم  $(صہ + صہ + ل) + \sqrt{-1}$  جب  $(صہ + صہ + ل)$  ہوگا

ضابطہ دی موٹور ہوگا

اسی طرح عمل کرنے سے ہر کم سے  $1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جو کہ صورت حوالہ صریح ہوئے اور ان کا حاصل نام

اب فرض کرو کہ ایسی اجزاء فرنی ان میں سے ہر ایک کم سے  $1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$

اسے ضابطہ دی موٹور کے مثبت صحیح ہوئی حالت میں ثابت ہے

دوم فرض کرو کہ ان منفی صحیح ہوتوں سے کم کے فرض کرو

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = [جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}]$$

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = [جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}]$$

شمار کنندہ نسبتاً دو کو کم سے  $1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ دو تو یہ حاصل ہوگا

$$جم بر - 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$

$$جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$

یعنی  $جم بر - 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ

یعنی  $جم بر - 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ

$$یا  $جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ$$

اسے ضابطہ دی موٹور کا اس حالت میں ثابت ہوتا ہے کہ منفی صحیح ہو

پس جب تک کہ صحیح ہو تو ہر حالت میں

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = [جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}]$$

اسے ثابت ہوتا ہے کہ  $جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$  جب تک کہ ایک قیمت

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] کی قیمتوں میں ہے$$

جب تک کہ صحیح ہو

اب آخر یہ فرض کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  کے فرض کرو

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = [جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}]$$

$$[جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}] = [جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}]$$

تو اس آخر جملہ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت یہ ہوگی کہ

$$جم بر + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$



[جم بر + ہ - آ جب بر]

معلوم ہیں

(۲۶۹) اب ہم ضابطہ دی موٹور سے نتائج عظیمہ مستنبط کرتے ہیں

ساوات  

$$\text{جم بر} + \text{ہ} - \text{آ جب بر} = [\text{جم بر} + \text{ہ} - \text{آ جب بر}]$$
  
 میں فرض کرو کہ نشت صحیح ہی اب بائیں طرف کے جملہ کی موجب ضابطہ جملہ نشائی کی صورت مفصلہ  
 اور ممکن اور ناممکن اجزاء دونوں ارکان کے مساوی لکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ  

$$\text{جم بر} = \text{جم بر} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} + \dots$$

جب ن بر = ن جم - ابر جب بر -  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  بر  

$$+ \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \dots$$

(۲۷۰) صورت قانونی دفعہ گذشتہ کی خواہ طاق ہو خواہ جفت ہو سب صورتوں پر حاوی ہے مگر  
 صورتوں میں بائیں طرف کے جملہ کے آخر رقم مختلف ہوگی اور ان صورتوں میں نیز ذکر فی بہت جگہ

اگر ن جفت ہو تو آخر رقم صورت مفصلہ

کی ممکن ہے یعنی (۱-) جب ن بر ہوگی اور آخر رقم ایک صورت میں ناممکن ہوگی یعنی (۱-)  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  بر

اور اسکو اس طرح لکھ سکتے ہیں  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  (۱-) ابر پس جب ن جفت ہیتو آخر رقم ن بر کی (۱-)  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  بر ہےاور آخر رقم جب ن بر کی (۱-)  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  بر ہے

اور اگر ن طاق ہو تو آخر رقم صورت مفصلہ [جم بر + ہ - آ جب بر] کی ناممکن ہوگی یعنی (۱-)  $\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$  بر  
 جسکو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$$

اور ایک صورت میں صرف ایک آخر رقم ممکن ہوگی یعنی

$$\frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم} - \frac{\text{ن} - (1 - \text{ن})}{2} \text{جم}$$

پس جب ن طاق ہے تو

آخر رقم جم ن بر کی ن (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  جم بر جب ۱-ا بر ہےاور آخر رقم جب ن بر کی (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  جب بر ہے

(۲۷) جب ن بر اور جم ن بر کے صورتانہ سے ہم ن بر کی سی ایک جملہ ہمیں تو اس کے

ہوں مستند کرنے میں تو

مس ن بر =  $\frac{ن}{۲}$  جب ن بر

$$= \frac{ن}{۲} \text{ جم ن بر } - \frac{ن}{۲} (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \text{ جم } ۳-۱ \text{ بر جب } ۳-۱ \text{ بر } + \dots$$

اب اس جملہ کے شمار کنندہ اور نسب نا کو جم ن بر پر تقسیم کرو تو مس ن بر کے واسطے یہ جملہ حاصل

$$ن \text{ بر } - \frac{ن}{۲} (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \text{ مس } ۳-۱ \text{ بر } + \frac{ن}{۲} (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \text{ مس } ۳-۱ \text{ بر } + \dots$$

$$۱ - \frac{ن}{۲} (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \text{ مس } ۳-۱ \text{ بر } + \frac{ن}{۲} (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \text{ مس } ۳-۱ \text{ بر } + \dots$$

(۲۷) اگر ن جفت ہو تو آخر رقم مس ن بر شمار کنندہ کی ن (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  مس ن ۱-ا بر ہےاور آخر رقم نسب نا کی (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  مس ن بر ہے اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ کی (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  مس ن برہے اور نسب نا کی ن (۱-ن)  $\frac{ن}{۲}$  مس ن ۱-ا بر ہے

یہ نتائج دفعہ ۲۷۰ سے قائم ہوتے ہیں

(۲۷) زاویہ جو آپس میں برابر نہ ہوں ان کے مجموعہ کے جب اور جب التمام اور اس کے وسط صورتانہ

عامہ حاصل ہو سکتے ہیں

دفعہ ۲۷۱ میں ہم لکھتے ہیں کہ

$$[ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ] [ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ] [ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ]$$

$$= \text{جم } (۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + \dots)$$

$$+ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } = \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + \dots$$

$$+ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } = \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + \dots$$

پس کے ٹکڑے یہ حاصل ہوتے ہیں کہ

$$\dots [ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ] [ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ] [ \text{جم } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } ]$$

$$= \text{جم } (۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + (۱-ن) \text{ جب } ۳-۱ \text{ بر } + \dots)$$

فرض کرو کہ ص ۱ مجموعہ ص ۱ + ص ۲ + ص ۳ + ... کو تعبیر کرنا ہی اور دو دوا سون کے حاصل ضرب کے مجموعہ کو ص ۱ تعبیر کرنا ہے اور تین تین دوا سون کے حاصل ضرب کے مجموعہ کو ص ۲ تعبیر کرنا ہے اور علیٰ ہذا القیاس تو ۱ + ص ۱ (۱-۱) ص ۲ + ص ۳ (۱-۱) ص ۴ + ... (۱-۱) ص ۵ + ... اجزاء ضربی کو باہم ضرب دینے اور ممکن اور نامکن اجزاء کو مساوی کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جم (ص ۱ + ص ۲ + ص ۳ + ...)} = \text{جم ص ۱ جم ص ۲ جم ص ۳ ...}$$

$$\text{جم (ص ۱ + ص ۲ + ص ۳ + ...)} = \text{جم ص ۱ جم ص ۲ جم ص ۳ ...}$$

اور تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ص ۱ - ص ۲ + ص ۳ - ص ۴ + ...}}{\text{ص ۱ - ص ۲ + ص ۳ - ص ۴ + ...}} = \frac{\text{ص ۱ - ص ۲ + ص ۳ - ص ۴ + ...}}{\text{ص ۱ - ص ۲ + ص ۳ - ص ۴ + ...}}$$

اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ میں (۱-۱) ص ۱ اور آخر رقم نسب نامہ میں (۱-۱) ص ۱ ہوگی اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ کی (۱-۱) ص ۱ اور آخر رقم نسب نامہ کی (۱-۱) ص ۱ ہے اگر ن زوجہ اور ص ۲ ... سب بسین برابر ہوں تو یہ قانونیہ مطابق دفعہ ۱۲۱ کے ہو جائیگیں

(۱۲۱) جب ص ۱ اور ص ۲ کو ص ۱ کے قواء کے سلسلہ میں پہلا اگر اب جم لکھتے ہیں جب ن مثبت صحیح ہو تو یہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جم ن بر} = \frac{\text{جم (ن-۱)}}{\text{ن-۱}} \text{ جم ن-۱ بر جب ن بر}$$

$$+ \frac{\text{جم (ن-۱)}}{\text{ن-۱}} \text{ جم (ن-۲)} + \frac{\text{جم (ن-۲)}}{\text{ن-۲}} \text{ جم (ن-۳)} + \dots$$

فرض کرو کہ ن بر = ص ۱ اور ن بے حد و نہایت بڑھے اور برابر ایسا بنے کہ ن مثبت صحیح رہے اور ن بر نہایت برابر ص ۱ کے ہو تو برابر بے حد و نہایت گھٹنا چاہئے پس مساوات گذشتہ سطح لکھی جاسکتی ہے کہ

$$\text{جم ص ۱ = جم ن بر} - \frac{\text{جم (ن-۱)}}{\text{ن-۱}} \text{ جم (ن-۲)} + \dots$$

$$+ \frac{\text{جم (ن-۱)}}{\text{ن-۱}} \text{ جم (ن-۲)} + \frac{\text{جم (ن-۲)}}{\text{ن-۲}} \text{ جم (ن-۳)} + \dots$$

اب جس وقت ن بے حد و نہایت زیادہ ہوتا ہے اور ص ۱ بر سید و نہایت کم ہوتا ہے تو ص ۱ برابر

واحد کے اور ایسی ہی ہر ایک قوت جس سے (جس سے) تک برابر واحد ہے اور جم بری برابر  
 واحد ہے اور ایسی ہی ہر ایک قوت جس سے لیکر جم بری تک جو دفعہ ۱۰ کے ہیں اس کے برابر  
 اوپر کی صورت یہ ہوگی کہ

$$\text{جم} = ۱ - \frac{۱}{۲ \times ۱} + \frac{۱}{۲ \times ۲} - \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۲ \times ۴} - \dots$$

اور نیز

$$\text{جب } n = ۱ \text{ جم بری} = \frac{۱}{۱} - \frac{(۱-۱)}{۲} + \frac{(۱-۱)^2}{۲ \times ۱} - \dots$$

پس جب  $n = ۲$  جم بری =  $\frac{۱}{۲} - \frac{(۲-۱)}{۲} + \frac{(۲-۱)^2}{۲ \times ۱} - \dots$   
 اسے معلوم ہوا کہ  $n$  کو بے حد و نہایت بڑا بنیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جم} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \dots$$

اس دفعہ کے نتائج عظیمہ جی کام کے ہیں اب آگے تین دفعوں میں ان کی کیفیت لکھینگے  
 (۲۷۵) جب  $n$  اور  $m$  سے کی جو صورت مفصلہ لکھی ہیں ان میں اس بات کا خیال رکھنا چاہیے  
 کہ یہ مقیاس قوسی زاویہ کا اسلئے کہ ہر کے بعد و نہایت کم ہونے سے جس کا واحد ہونا اور  
 صورت پر تو قوت ہے کہ زاویہ کا اندازہ مقیاس قوسی سے کیا جائے مگر جب کوئی اوریمانہ واحد  
 زاویوں کے اندازہ کرنے کے مقرر کیا جائے تو ان صورتوں میں کی ترمیم ہو سکتی ہے مثلاً

$$\text{جب } n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \dots$$

اس میں مقیاس قوسی ان کا ہی ہے  $n = ۱$  اور اس سے ہر کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب } n = \frac{۱}{۱۸۰} - \frac{(۱-۱)}{۱۸۰} + \frac{(۱-۱)^2}{۱۸۰} - \dots$$

$$\text{اور ایسی ہی جم } n = ۱ - \frac{۱}{۱۸۰} + \frac{(۱-۱)}{۱۸۰} - \frac{(۱-۱)^2}{۱۸۰} + \dots$$

(۲۷۶) جب  $n$  اور  $m$  کے سلسلہ انظامی سے کی سب قیمتوں کے واسطے ہیں  
 جب کے سلسلہ کی  $n$  و  $m$  رقم  $(-۱)^n - (-۱)^m$  ہے اسے معلوم ہوا کہ عددی قیمت

نسبت  $(۱+n)$  و  $(۱+m)$  اور  $n$  و  $m$  رقم کی  $(۱+n)^n$  و  $(۱+m)^m$  خواہ  $n$  و  $m$  کی قیمت  
 ہوں کو ایسا برا مقرر کر سکتے ہیں کہ ان اس قیمت کے واسطے اور اسے بڑی قیمتوں کے واسطے

ضابطہ دی موٹر

金

اب دفعہ ۱۵۰ میں ثابت ہوا کہ جن - ۲۲ بر کی حدود کا اور نیز (حب) بر کی

یہ بات ظاہر ہے کہ جب  $r = 1$  کے ہوتو یہ صحیح ہے کہ جب  $\frac{r}{r-1} = 2$  سے زیادہ کی حد سے ہے

اسمین جب برجید و نہایت گہٹنہای تو رہی بجید و نہایت کم ہوتای ہوا سطح حد این طرف

و رجب بر سجد و نہایت کم ہوتا ہے اور تمام رقبین بائیں طرف کے

(۲۷۸) شال ذیل سے یہ امر ظاہر ہوگا کہ حجم ہر کاسلہ کے طرح عمل کا فائدہ مند ہو سکتا ہے



اگر میں راویہ منفرد ہو تو متصل کرتے کہ اصل کے واسطے سبج سا جملہ حاصل ہو سکتا ہے

طس = طآ + طب + رطاطب جم س = طآ + طب + رطاطب جم

=(طا + طت) - طاطب بر

سے طس = (طا + طب) - ا - طا ط

مشائیں

(۲) قیمت (۱) کی دریافت کرو

(۲) پ (۱) کی ریت کو

(۴) (۱) = ۱۰۰

(۴) مین مینین  $1 + \frac{1}{(1-1)}$  فی حال

(۵) معلوم کہ جبر =  $\frac{11}{21} \times \frac{11}{44}$  لوثات لروار برعبر بمیاسر عسی سلم کا،

(۶) معلوم ہے کہ جب  $\left(\frac{p}{q} + \text{بر}\right) = 51$ ، تو تقریباً قیمت بر کی دریافت کو اوپر کی

دوسری قوت سے آگے کی قوتوں کو یہ ہر دو

(۷) اگر  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  و  $\frac{n}{r} = \frac{s}{t}$  باشد، آنگاه  $\frac{m}{r} = \frac{ps}{qt}$

$$\frac{(1+n)(1+n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

[illegible]

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

اسے برہمہ برکو حار قہون تک دریافت کرو

(9) اگر  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_r$

(۱) اگر  $\frac{1}{n}$  بر  $\frac{1}{m}$  +  $\frac{1}{k}$  + ... +  $\frac{1}{r}$  =  $\frac{1}{n}$  باشد، و  $n$  بر  $m$  و  $k$  و ... و  $r$  بخش پذیر باشد، آنگاه  $\frac{1}{n}$  بر  $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{r}$  بخش پذیر است.

$$\frac{b^{1-n}(1)}{n} + \dots + \frac{n-n}{n} b^n - \frac{r-n}{n} r^b = n r^b$$

باب نوزدہم

(۱۰) اگر حجم  $h$  سد +  $h(1-a)$  جب  $h$  سد کو طائی جگہ اس جملہ  $(ط+ط) (ط+ط)$  میں رہیں  
اور اسی کے مشابہ تقادیر ط او طس کی جگہ رہیں اور نتیجہ کو  $1 + سد - ا$  کی صورت میں تحویل  
کریں تو  $1$  اور  $b$  کی قیمتیں سد او سد اور رکی رقموں میں دریافت کرو

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\left. \begin{aligned} & \text{حم بر} + \text{جم سر} (1-a) \quad (\text{جب بر} + \text{جب سر}) \\ & + \quad \text{جم بر} + \text{جم سر} (1-a) \quad (\text{جب بر} + \text{جب سر}) \\ & = \quad \text{جم بر} + \text{جم سر} (1-a) \quad (\text{جب بر} + \text{جب سر}) \end{aligned} \right\}$$

(۱۲) اگر  $لا = ح$  اور  $ا (1-a) = ح - ا$  تو ثابت کرو کہ

$$1 + \text{حم بر} = \frac{ح}{2} (1 + لا) (1 + لا)$$

(۱۳) ایک قوس مدور نہایت چھوٹی ہے اس کے طول دریافت کرنے کے لئے یہ قاعدہ ثابت کرو کہ  
اگر نصف قوس کے وتر کے ایشہ گنی میں سے وتر کل قوس کے طول تفریق کریں تو حاصل تفریق کی  
ایک تہائی برابر طول قوس کے ہوگی

(۱۴) اس مساوات متطابق سے

$$\frac{(لا-ح) (لا-ط) + (لا-ح) (لا-ط) + (لا-ح) (لا-ط)}{(لا-ح) (لا-ط) + (لا-ح) (لا-ط) + (لا-ح) (لا-ط)} = 1$$

$لا = 2$  جم  $2$  بر +  $ا (1-a)$  جب  $2$  بر کے فرض کر کے یہ نتائج مستنبط کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{جب (بر-صد) ح (بر-ل) جب ا (بر-سد)} \\ & + \text{جب (بر-صد) ح (بر-ل) جب ا (بر-سد)} \\ & + \text{جب (بر-صد) ح (بر-ل) جب ا (بر-سد)} \\ & + \text{ح (بر-صد) ح (بر-ل) جب ا (بر-سد)} = 0 \end{aligned}$$

میسوال باب

(۱۶۹) صورت مفصلہ بعض علم متناهی جلون کی  
فرض کرو کہ جم بر +  $ا (1-a)$  جب بر کو لا تعبیر کرتا ہے تو

$$\frac{1}{لا} = \text{حم بر} + \text{جم بر} (1-a) \quad \text{جب بر} = \text{جم بر} (1-a) \quad \text{جب بر}$$



$$n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

اور جب  $n$  طاق ہو تو اسکو  $m+2$  اسے فرض کرو تو دو ارقام متوسط صورت مفصلہ  $(n+1)$  ہو گئیں یعنی  $(m+1)$  دین رقم اور  $(m+2)$  دین رقم اور انکا مجموعہ  $n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$

اسے معلوم ہوا کہ جب  $n$  طاق ہو تو آخر رقم  $n-1$  جم کر کی  $n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$  جم کر ہوگی

(۲۸۱) اگر  $n$  بخت صحیح ہو تو جب  $n$  براضاع بر کی جیب التامون کے ارقام میں پہل سکتی ہے اور اگر  $n$  طاق مثبت صحیح ہو تو جب  $n$  براضاع بر کے جوب میں پہل سکتی ہے اب ہم ان باتوں کا ذکر دو کی دفعات میں کریں گے

(۲۸۲) اضاع بر کی جیب التامون کی رقموں میں جب  $n$  بر کو رقموں میں پہلا اور  $n$  بخت  $n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$

اب بائیں طرف کی ارقام کو اسطرح ترتیب دو کہ اول اور آخر رقم ایک جگہ ہوں اور اول سے دوسری رقم اور آخر سے صرف دوسری رقم ایک جگہ ہوں اور علیٰ ہذا القیاس تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

(۲۸۳) جب  $n$  بر کو اضاع بر کے جوب کے ارقام میں پہلا اور  $n$  طاق مثبت صحیح ہے

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) \dots \frac{n(n-1)}{2} + 1$$





اب ایک ترکیب بلا واسطہ امثال لہ اور لہ... کی قیمت دریافت کرنیکی لکھتے ہیں بر کو ر + ہ  
سے بدل دو تو جن بر کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

جم ن بر جم ن ہ - جب ن بر جب ن ہ

اب جم ن ہ اور جب ن ہ کی قیمتیں ارقام ن ہ میں بوجہ دفعہ ۲ کے رکھو تو  
اوپر کے جملہ کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

جب ن بر - ن ہ جب ن بر - ن ہ جم ن بر + وغیرہ

اب رقم لہ ۲ بر میں بر کو بر + ہ سے بدلو تو یہ حاصل ہو گا کہ

لہ ۲ (جب بر جم ہ + جم بر جب ہ) ۲ یعنی

لہ ۲ (جب بر + جم بر - ۲ جب بر -)

اگر اسکی صورت مفصلہ خواہ میں لکھیں تو رقم جمین ہ شامل ہو یہ ہوگی کہ

لہ ۲ (۲ - ۱) جب ۲ - ۲ بر - ر جب ۲ بر ہ

ہ کے امثال برابر لکھو

- ۲ جم ن بر = لہ ۲ (جم بر - جب بر) + لہ ۲ (۲ جب ۲ بر جم بر - ۲ جب ۲ بر)

+ ... + لہ ۲ (۲ - ۱) جب ۲ - ۲ بر جم بر - ر جب ۲ بر +

اب ۱ - جب ۲ بر جم بر کی جگہ بائیں طرف لکھو تو رقم جمین جب ۲ بر شامل ہو یہ ہوگی

- لہ ۲ (۲ - ۱) ۲ + ر + لہ ۲ (۲ - ۱) ۲ + لہ ۲ (۲ - ۱) ۲ + لہ ۲ (۲ - ۱) ۲

سلسلہ جو - ۲ جم ن بر کے واسطے ہے او میں جو امثال جب ۲ بر کے ہیں یعنی - ۲ لہ ۲

وہ امثال مذکور کے برابر ہونی چاہئے پس

۲ لہ ۲ = ۲ لہ ۲ - لہ ۲ (۱ + ۲) (۱ + ۲)

اسی واسطے لہ ۲ + ۲ = لہ ۲ (۲ - ۱) (۲ + ۲) لہ ۲

اب اس قانون کی استعانت سے اگر ۱ = ۱ کے خیال کریں تو متواتر امثال یہ حاصل ہوگی کہ

$$1^m = 1 - \frac{n}{m} = \frac{m-n}{m}$$

$$1^m = \frac{m-n}{m} = \frac{(n-2)}{m \times m \times m \times m}$$

اور علیٰ ہذا القیاس

اسے معلوم ہوا کہ آخر کار

$$جمن بر = 1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m \times m} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} + \dots$$

اوپر کے عمل پرچہ کے اشغال کو برابر لکھنے سے یہ حال ہوتا ہے

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m \times m \times m \times m} + \dots$$

قیمتیں ۱ اور ۱۰ وغیرہ مندرجہ کردہ

$$[جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots]$$

جب ن طاق ہو تو ہم یہ فرض کر کے آگے حل کیسکتے ہیں کہ

$$جمن بر = \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} + \dots$$

اور موافق سابق کے عمل کرنے سے ہلکویہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots$$

$$[جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots]$$

(۲۸۸) دفعہ گذشتہ میں جو چار صورتانہ حال ملتی ہیں ان میں سے چاروں کی کہ - برکتوں اگرچہ صحیح عدد ہوں تو

$$(-1)^{\frac{n}{m}} جمن بر = 1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m \times m} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} + \dots$$

$$(-1)^{\frac{n}{m}} + جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots$$

اگر ن طاق صحیح عدد ہو

$$(-1)^{\frac{n}{m}} جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots$$

$$(-1)^{\frac{n}{m}} جمن بر = \frac{n}{m} - \frac{n(n-1)}{m \times m} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m \times m \times m} - \dots$$



اشک متفرق

(۱) (جبر)  $۴ + ۲$  کو اضعا ف بر کی جوب تمام کی ارقام میں پہلاؤ

(۲) (جبر)  $۴ + ۱$  کو اضعا ف بر کی جوب کے ارقام میں پہلاؤ

(۳) (جبر)  $۲$  کو اضعا ف بر کی جوب تمام کے ارقام میں پہلاؤ

(۴) کسی شلت میں ثابت کرکہ

$$\frac{\text{طا} + \text{جم} + (\text{ب} - \text{س})}{\text{ط} + \text{جم} + (\text{س} - \text{ب})} = \frac{\text{ط} + \text{جم} + (\text{ب} - \text{س})}{\text{ط} + \text{جم} + (\text{س} - \text{ب})}$$

$$\text{جم} + (\text{ب} + \text{س}) = \text{ط} + \text{جم} + (\text{س} + \text{ب})$$

(۵) مثلث اب س زاویوں کے عمود اور ب ی اور س ف متقابل کے ضلعوں پر کھائے گئے ہیں

طا جب (ب اور س) اور طب جب (س بی - اب ی) اور طب جب (ا ف س - بس ف) =

(۶) اس اور بس پر اور ب کے عمود اور ب د متقابل کے ضلعوں پر کھائے گئے ہیں جو

دائرہ بنایا جائے اور سکا نصف قطر ب مقرر کر دو

$$\text{اب} = \text{س} = (\text{قطر} + \text{قطب} + \text{س} + \text{ب})$$

(۷) تین دائرے جنہیں سے ہر ایک نصف قطر ہے آپس میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ثابت کرکہ

اونکی درمیان سطح برابر ہے (۸۳ - ۴) ط کے

(۸) دائرہ اندر جو کثیر الاضلاع منظم بنائی جائے اور سکا رقبہ اور وسط بندہ یوں دو منظم الاضلاع

کے رقبوں کے درمیان ہوتا ہے جنکی اضلاع کی تعداد نصف پہلے شکل سے ہوا ویر ایک دائرہ کے اندر

اور دوسری اور بنائی جاتی

(۹) ایک دائرہ کے اوپر جو کثیر الاضلاع منظم بنائی جائے اور سکا رقبہ اور وسط موسیقیہ یوں دو منظم الاضلاع

کے رقبوں کے درمیان ہوتا ہے جنہیں ایک دائرہ کے اندر بنائی جائے اور اسکی اضلاع کی تعداد پہلی

شکل کی تعداد اضلاع کے مساوی ہو اور دوسرے دائرہ کے اوپر بنائی جائے اور اسکی اضلاع کی تعداد

نصف پہلی شکل کی اضلاع کی تعداد سے ہو  
(۱۰) اگر دائرہ کے اندر جو چھس بنایا جائے اور اس کا ضلع  $ج$  ہو تو نصف قطر

$$ج = ۵۸ + ۵۸ \text{ ہوگا}$$

(۱۱) تین دائرے جنکے نصف قطر  $ص$  و  $ج$  ہیں ایک دوسرے کو باہر کی طرف سے کہنے

ثابت کرو کہ نقاط تماس سے جو تماس نکالے جائیں تو وہ ایک ایسے نقطہ پر ملتے ہیں جس کا فاصلہ دونوں نقطوں

$$\left( \frac{ط + ص}{ج} \right)$$

میں سے کسی نقطہ سے یہ ہے کہ  
(۱۲) ایک ذواربۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب لیکن تو اوٹکے مقابل کے زاویے ایک دوسرے کے  
تکملے ہوتے ہیں اور اضلاع کی مقدار ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ ہوئی ہے تو اس کا رقبہ اور نصف قطر اور ان دونوں

جو اوٹ کے اندر اور اوپر کیجے جائیں دریافت کرو  
(۱۳) دائرہ میں ایک کثیر الاضلاع منتظم بنائی گئی ہے اور اوٹ میں ہی اضلاع کی قسطہ الاضلاع

اوپر بنائی گئی ہے اور اوٹ کے رقبوں میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہے تعداد اضلاع دریافت کرو  
(۱۴) اگر تین تماسہ دائروں کے نصف قطر  $ط$  و  $ص$  و  $ج$  ہوں اور تو جو نقاط تماس میں

$$\left( \frac{ط}{ج} + \frac{ص}{ج} \right) = \left( \frac{ط}{ج} + \frac{ص}{ج} \right) = \left( \frac{ط}{ج} + \frac{ص}{ج} \right)$$

(۱۵) ثابت کرو کہ غایت الانتہا (س) کی جب بر سجد نہایت بڑی ہی ہے  
(۱۶) کسی ذواربۃ الاضلاع کے دو قطر آپس میں برابر نہیں ہو سکتے جب تک کہ مقابل کے

ضلع مساوی نہ ہوں  
(۱۷) دو دائرے جنکے نصف قطر اور  $ص$  میں ایک دوسرے کو زاویہ لہر کا ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ط + ص = ج$$

(۱۸) مثلث میں جو دائرہ بنایا جائے اور اس کا نصف قطر مثلث کی دائرہ بیرونی کے آدھے ہی  
نصف قطر سے مثلث کے برابر نہیں ہوتا

## اکیسواں باب

حب اور حب التمام کی قوت نمای قیمتیں

(۲۸۹) اگر کسی کلا اور کسی کلا کو موافق ضابطہ قوت نمای پہلا میں تو یہ حال ہوگا کہ

$$\frac{1}{1} (کلا - ی - کلا) = 1 + \frac{کلا}{کلا} + \frac{کلا}{کلا} + \frac{کلا}{کلا} + \dots$$

$$\frac{1}{1} (کلا - ی - کلا) = 1 + \frac{کلا}{کلا} + \frac{کلا}{کلا} + \frac{کلا}{کلا} + \dots$$

اگر یہ ممکن کی طرح ہو سکتا ہے کہ  $1 = 1$  کے ہو تو  $1 = 1$  اور  $1 = 1$  اور علیٰ ہذا  
تو ان میں طرف کارکن اولیٰ مساوات کا صورت مفصلہ جم لائی ہوگی اور بائیں طرف کارکن دوسری  
مساوات کا صورت مفصلہ حب لائی ہوگی (صفحہ ۲۷۴) تو اس سے یہ نتائج مستنبط ہوئے ہیں کہ

$$\text{جم لہ} = \frac{1 - 1}{1 - 1} + \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} - \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

اب معنی سیکھ سادی ان مساواتوں کے ہیں کہ اگر ہم  $1 - 1$  لہ اور  $1 - 1$  لہ لے جو حب  
ضابطہ قوت نمای کے اس طرح پہلا میں کہ گویا  $1 - 1$  ایک اصل مقدار ہے تو اوپر کی صورت  
قانونیہ سے جم لہ اور حب لہ کے واسطے جملہ معلوم حاصل ہونگے یہ جملہ جو جم لہ اور حب لہ  
کے واسطے ہیں اور انکو قیمتیں قوت نمای حب التمام اور حب کی کہتے ہیں

(۲۹۰) حب اور حب التمام کی قوت نمای قیمتوں کے اور جملوں کی بھی قیمتیں اسی قبیل کی

$$\text{مستنبط ہو سکتی ہیں مثلاً} \quad \frac{1 - 1}{1 - 1} - \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{مس لہ}$$

اب ہم بعض نتائج قوت نمای قیمتوں کی استعانت سے ثبات کرتے ہیں

(۲۹۱) ہر کو قواسم برین پہلا

بموجب دفعہ ۲۹۰ کے

$$\frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} + \frac{1 - 1}{1 - 1}$$



لیکن اگر  $b = 0$  نہ کہ  $a$  سر اس میں سرد میان - کہہ اور کہہ کے واقع ہی تو

$$\text{سر} = \text{سر} - \frac{1}{\text{سر}} + \frac{1}{\text{سر}} - \dots$$

یعنی بر - ۱ کبر = مس بر -  $\frac{1}{4}$  مس بر +  $\frac{1}{8}$  مس بر - ۰.۰۰

(۲۹۴) اگر کسی کی سلسلہ میں ۷۰ = کچھ کے رکھو تو اس کچھ = ۱۰ کے ہوں گے تو

$$\dots \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

۴ ۳ ۲ ۱  
 کہ کی قیمت دریافت کرنے کے واسطے اس سلسلہ کو کام میں لاسکتی تھی لیکن اس میں انضمام کی سچ ہو تا ہی کہ جب بہت سی رقمیں لیں تو تقریبی قیمت کہ کی دریافت ہوتی ہے

(۲۹۵) نور کا سلسلہ

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

پس  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{8 \times 16} - \frac{1}{16 \times 32} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{p \times 2} - \frac{1}{p \times 3} + \frac{1}{p \times 4} - \frac{1}{p} +$$

(۲۹۶) مسیحی کا سلسلہ

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{12} \text{ مِسْرَا} = \frac{10}{24} \text{ مِسْرَا} = \frac{5}{12} \text{ مِسْرَا} = \frac{5}{12} \text{ مِسْرَا}$$

$$\frac{16}{119} \text{ مس} = \frac{\frac{10}{17}}{\frac{20}{119}} = \frac{1}{2} \text{ مس} = \frac{5}{16} \text{ مس} = \frac{1}{8} \text{ مس}$$

اسے معلوم ہوا کہ ہنس ' ۵ کچھ ہی بڑا نسبت کم کے ہے فرزند کہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{u+1}{u-1} = \text{مس} \left( \frac{\text{کم}}{\text{مسا}} + 1 \right) = \frac{120}{119}$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ  $\frac{1}{999}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$$

$$\dots + \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2 \times 0} + \frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{2} \Big] n =$$

$$[ - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} ]$$

(۲۹۷) یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$

پس  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$  جس کا حساب عددی لگانے کے واسطے بہت سہجہ  
دو صحیحین کا جدیہا رسو مرتبہ تک قیمت کہ کا حساب کیا ہے

(۲۹۸) معلوم ہے کہ جب  $ل = ن$  جب  $(ل + س)$  مطلوب ہے کہ لا کو  $ن$  کے قواسم بنائیں

$$\begin{aligned} \text{یہاں } ل = ن \text{ لہذا } (ل - ۱) = (ن - ۱) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

$$\text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س)$$

مثال کے طور پر فرض کرو کہ  $س = ۲$  لہذا  $ن = ۱$  پس

$$ل = ۲ \text{ جب } ل = ۱ \text{ جب } ل = ۱ \text{ جب } ل = ۱ \text{ جب } ل = ۱$$

(۲۹۹) معلوم ہے کہ  $س = ل$  جس کا حساب عددی لگانے کے واسطے ایک سلسلہ دریافت کرو

$$\begin{aligned} \text{یہاں } ل = ن \text{ لہذا } (ل - ۱) = (ن - ۱) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \\ \text{اسی واسطے } (ل - ۱) = (ن - ۱) \text{ لہذا } (ل + س) = (ن + س) \end{aligned}$$

اسکول کے لئے  $(1-x)^n = (1-x)^{n-1} + (1-x)^{n-2} + \dots + 1$  کوک

$$-\left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}\right] + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}\right] m - (1 - m) =$$

استوار ۵ = ۵ - ۴ + ۳ - ۲ + ۱ - ۰ + ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ = ۰

(۳) صورت مفصلی الحرب لاکى جو قواء لایمین لکى جاکى تو لاکى کے اشغال دریافت کرو

همان  $\frac{1}{2}$  است  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$

$$u[-1, -1]_r \pm u[(1-), \pm 1]_r$$

ان دو قوت نہای جلو کن موافق ایل قوت نہای پہلو کو مثال لانا کی سہ ہو گئی کہ

$$\left[ \sqrt{(1-x)^2 - 1} + \sqrt{(1-x)^2 + 1} \right] \frac{1}{2}$$

$$\left[ \frac{1}{(1-x)} \right]_0^1 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \left[ \frac{1}{(1-x)} \right]_0^1 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$$

بعضی کتب = مجموعہ اور = حوالہ = حوالہ

نور اللہ کی اشعار بہ ہر صوفی و شاعر کے

(۱+۲) آ [۱+۲] + [۱+۲] آ

$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

(۱-۲) جب نبر + بر = بم (۳-۴) جب نبر

جمن بر  $\frac{(1+1)}{2}$

(۳۱) دفعہ ۲۹۱ میں سلسلہ جو لکھا ہے وہ کبھی کبھی مشنوں کے حل کرنے میں امداد کرتا ہے،

ہم کو معلوم ہے کہ جب  $b = \frac{p}{p+q}$  جب  $1 = \frac{p}{p+q}$  جب  $(b + s)$

اسے ثابت ہوتا ہے کہ بموجب صورت قانونی کے

$$b = \frac{1}{3} \text{ ط } + \frac{1}{2} \text{ ط } + \frac{1}{3} \text{ ط}$$

طَبْ جَوْطَا طَبْ مَوْتَوَسَلِ انْضَامِی سے اور اگر  $\frac{1}{16}$  ایک جوڑے کے مَوْتَوَسَلِ کی

رقم کے ۱۰ قسمت کا فروخت کر کے ایک سو سو روپے کا ایک سو سو روپے کا

مدرسون کی حیثیت سے اس کے بارے میں معلوم ہو جائے گی۔

ایک سو ان باب ۲۳۷  
(۲۲) ایک مثلث کے دو ضلع معلوم ہوں اور زاویہ درمیانی اور ان کا معلوم ہے یہ مسئلہ

کے کو کارٹم کا سلسلہ دریافت کرو  
فرض کرو کہ ط اور طب اضلاع معلوم ہوں اور س مقیاس توسی زاویہ معلوم کا اور طب کو ط کا چھوٹا

$$\text{طس} = \text{طا} + \text{طب} - \text{اطا طب جم س} = \text{طا} + \text{طب} - \text{طا طب} \quad \text{[سی (۱-۱) سی (۱-۱) سی (۱-۱)]}$$

$$= [\text{طا طب سی (۱-۱)}] - [\text{طا طب سی (۱-۱)}] =$$

$$\text{طا} - [\text{طا طب سی (۱-۱)}] = [\text{طا طب سی (۱-۱)}] - [\text{طا طب سی (۱-۱)}]$$

$$\text{پس اگر کو طس} = \text{ر کوک طا} + \text{کوک} - [\text{طا طب سی (۱-۱)}] + [\text{کوک} - \text{ا طب سی (۱-۱)}]$$

$$= \text{ر کوک طا} - \text{طا} - [\text{طا طب سی (۱-۱)}] + [\text{کوک} - \text{ا طب سی (۱-۱)}]$$

$$\text{اسیو کوک طس} = \text{کوک طا} - \text{طا} - \text{طا طب جم س} - \text{طا طب جم س} - \text{طا طب جم س} - \dots$$

یہ سلسلہ انضمامی ہے کیونکہ طب چھوٹا نسبت طا کے ہے اور اگر طا چھوٹا ہو تو چند قوتوں سے کوک طس کافی درجہ تک تقریباً معلوم ہو جائیگی

### مثالیں

(۱) جیب اور جیب التمام کی قوت نمایاں

$$\text{جب} = \frac{1}{\text{جم}} = \frac{1}{\text{جم}}$$

کے ثبات کر نہیں کام میں لاؤ  
(۲) اضلاع مثلث قائم الزاویہ کے اگر ۴۹ اور ۵۱ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے متقابل کونے ۳۴° ۵۱' اور ۴۵° ۱۱' تقریباً ہیں

(۳) اگر ایک مثلث کا زاویہ میں معلوم ہو اور دو اور متصل کے اضلاع طا اور طب تقریباً برابر ہوں تو ثابت کرو کہ اور زاویے تقریباً

$$90 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} [\text{طا طب جم س} - \text{طا طب جم س}]$$

(۴) اگر کسی مثلث میں ا ب بے بقائیدس کے چھوٹا ہو



۱ = ب + ۲ ط - ط ب + (ط - ط ب) جب ب کے قریب قریب ہو کر  
(۵) اگر ط اور ط ب ضلع مثلث متساوی ہوں اور ان کے مقابل کے زاویے ۱ اور ب ہوں تو  
لوک ط ب - لوک ط

$$= \text{جم } ۱ - \text{جم } ۲ + \frac{۱}{۲} (\text{جم } ۱ - \text{جم } ۲) + \frac{۱}{۲} (\text{جم } ۱ - \text{جم } ۲) + \dots$$

$$(۶) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \dots = \frac{۱}{۲}$$

$$(۷) \text{ اگر } ۱ + ب = (۱ - ۱)^n = \text{لوک } (م + ن) (۱ - ۱)^n \text{ تو ثابت کرو}$$

$$\text{مس ب} = \frac{۱}{۲} \text{ اور } ۱۲ = \text{لوک } (ن + م)$$

$$(۸) \text{ جم } (بر + سر) (۱ - ۱)^n \text{ کو تخیل کر کے } + \text{صد } (۱ - ۱)^n \text{ کی صورت کا بناؤ}$$

$$(۹) \text{ جب } (بر + سر) (۱ - ۱)^n \text{ کو تخیل کر کے } + \text{صد } (۱ - ۱)^n \text{ کی صورت کا بناؤ}$$

$$(۱۰) [ط + ص] (۱ - ۱)^n + [ع + ق] (۱ - ۱)^n \text{ کو تخیل کر کے } + \text{صد } (۱ - ۱)^n \text{ کی صورت کا بناؤ}$$

$$(۱۱) [ط + ص] (۱ - ۱)^n + [ع + ق] (۱ - ۱)^n \text{ کو تخیل کر کے } + \text{صد } (۱ - ۱)^n \text{ کی صورت کا بناؤ}$$

(۱۲) ثابت کرو کہ

$$[جب (س - بر) + ی (۱ - ۱)^n] = جب (س - ن بر) + ی (۱ - ۱)^n$$

## الیسوان باب

علمی مثلثی سلسلوں کا جمع کرنا  
(۳۳) ایک سلسلہ زاویوں کا متوالیہ جابجائے اور ان کے جوب کا مجموعہ دریافت کرو

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کی ن رقمین ہوں

$$\text{جب } س + جب (س + صد) + جب (س + صد) - \dots + جب (س + (ن - ۱) صد)$$

$$\text{ہم کو معلوم ہے کہ جم } (س - ۱ صد) - \text{جم } (س + ۱ صد) = \text{جب } ۱ صد \text{ جب سہ}$$

$$\text{جم } (س + ۱ صد) - \text{جم } (س + ۲ صد) = \text{جب } ۱ صد \text{ جب سہ}$$

$$\text{جم } (س + ۲ صد) - \text{جم } (س + ۳ صد) = \text{جب } ۱ صد \text{ جب سہ}$$

$$\text{جم (سہ} + \frac{۲۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جم (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} = \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ جب [سہ} + (۱-۱) \text{اصہ]}$$

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کا مجموعہ ص ہو تو جمع کرنے سے

$$\begin{aligned} \text{جم (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جم (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} &= \text{ص جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ} \\ \text{اسی واسطے ص} &= \text{جم (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جم (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} \\ &= \text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} \end{aligned}$$

(۳۰۷) ایک سلسلہ زاویوں کا متوالیہ جاسیے، اوں زاویوں کے جو اہلہام کے مجموعہ دریافت کرو  
فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ میں ن رقیقین پہنچیں کہ

$$\text{جم سہ} + \text{جم (سہ} + \text{اصہ)} + \text{جم (سہ} + ۲ \text{اصہ)} + \dots + \text{جم (سہ} + (۱-۱) \text{اصہ)}$$

ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{aligned} \text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} &= \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ جم سہ} \\ \text{جب (سہ} + \frac{۲۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} &= \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ جم (سہ} + \text{اصہ)} \\ \text{جب (سہ} + \frac{۳۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} + \frac{۲۰}{۲} \text{اصہ)} &= \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ جم (سہ} + ۲ \text{اصہ)} \end{aligned}$$

$$\text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} + \frac{۲۰}{۲} \text{اصہ)} = \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ [سہ} - (۱-۱) \text{اصہ]}$$

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کا حاصل جمع ص ہو تو جمع کرنے سے

$$\begin{aligned} \text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} &= \text{ص جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ} \\ \text{اسی واسطے ص} &= \text{جب (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} + \text{جب (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} \end{aligned}$$

$$\text{جم (سہ} + \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)} - \text{جب} \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ} = \text{جم (سہ} - \frac{۱۰}{۲} \text{اصہ)}$$

(۳۰۵) دفعہ ۳۳ کا سلسلہ دفعہ ۳۳ کے سلسلہ سے سطح مستقیم پر کھینچا

کہ سہ + کپے کو بجایا سہ کے لکھ دینے ان سلوک کے جمع کرنے سے اکثر ایسی ضرورت  
پڑا کرتی کہ طالب علم کو انکا حاصل جمع بیزبان ہونا پڑتا، ابھی نے لکھا، کہ اگر یہاں سے معلوم ہو تو

وہ کافی ہے کیونکہ دوسرا نتیجہ تو نقطہ اس بطرح حاصل ہو سکتا ہے کہ جب کو جب التمام سے  
اول فرض کر کے شمار کنندہ میں بدل دو اب نتائج کی صحت کا امتحان باسانی ہو سکتا ہے کہ جب  
جب ن = ۱ اور ن = ۲ تو ظاہر صحت نتائج کی معلوم ہوتی اور یہ گویا محک امتحان اور صورت

قانونیہ کی صحت کا ہے اور وہ صورتیں جنہیں صہ = سہ کی ہو گئے کے قابل ہیں تو

$$\text{جب سہ} + \text{جب ۲ سہ} + \text{جب ۱ سہ} + \dots + \text{جب ن سہ} = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \dots + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ}$$

$$\text{جب سہ} + \text{جب ۲ سہ} + \text{جب ۳ سہ} + \dots + \text{جب ن سہ} = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ} + \dots + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ سہ}$$

(۳۰۶) اب مجموعہ ن رقموں

جب سہ - جب (سہ + صہ) + جب (سہ + ۲ صہ) - ... + (-۱) جب (سہ + (ن-۱) صہ) + (-۱) صہ

کا ہم مستند کر سکتے ہیں اس سلسلہ کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

جب سہ + جب (سہ + صہ + کہ) + جب (سہ + ۲ صہ + کہ) + ... + جب (سہ + (ن-۱) صہ + کہ) + (-۱) صہ + کہ

اس میں صرف دفعہ ۳۰۶ کے نتیجہ میں صہ کی جگہ پر کہ لکھ دیا ہے

پس مجموعہ مطلوب [جب سہ + (-۱) صہ + کہ] + جب (سہ + کہ) + (-۱) صہ + کہ

جب سہ + کہ

اور اس بطرح

جب سہ - جب (سہ + صہ) + جب (سہ + ۲ صہ) - ... + (-۱) جب (سہ + (ن-۱) صہ) + (-۱) صہ

= جب سہ + (-۱) صہ + کہ + (-۱) صہ + کہ + (-۱) صہ + کہ + ... + (-۱) صہ + کہ

جب سہ + کہ

(۳۰۷) ان ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

قم ۱ لا + قم ۲ لا + قم ۳ لا + قم ۴ لا + ... + قم ن لا

ہم کو معلوم ہے کہ قم ۱ لا = مم ۱ لا - مم ۲ لا

قم ۲ لا = مم ۲ لا - مم ۳ لا

قم ۳ لا = مم ۳ لا - مم ۴ لا

قم ن لا = مم ن لا - مم ن+۱ لا

فرض کرو کہ ص سلسلہ مفروضہ ہے تو جمع کرنے سے

$$ص = م \frac{1}{2} - م \frac{1}{2} - ۱$$

(۳۰۸) ان رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

$$مس لا + ۱ مس ۱ + ۱ مس ۱ + ۱ مس ۱ + \dots + ۱ مس ۱ - ۱$$

مکو معلوم ہے کہ مس لا = عم لا - ۲ مم لا

$$۱ مس ۱ = ۱ مم ۱ - ۱ مم لا$$

$$۱ مس ۱ = ۱ مم ۱ - ۱ مم لا$$

$$۱ مس ۱ - ۱ مم ۱ = ۱ مم ۱ - ۱ مم لا$$

فرض کرو کہ ص سلسلہ مفروضہ کو تعبیر کرنا ہے تو جمع کرنے سے

$$ص = ۱ مم ۱ - ۱ مم لا - ۲ مم لا$$

$$اور رقم ۱ مم ۱ = ۱ مم ۱ - ۱ مم لا - ۲ مم لا$$

اب اگر ن کو فرض کریں کہ وہ جید و نہایت زیادہ ہوتا تو جم ص = ۱ اور جب ص = ۱ پس

غایت انتہا سلسلہ مفروضہ جب ن جید و نہایت زیادہ ہو لا - ۲ مم لا ہے

(۳۰۹) ان رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

$$جب ص + ح جب (ص + ص) + ح جب (ص + ص) + \dots + ح جب (۱ + ص) + ح جب (۱ - ص)$$

فرض کرو کہ ص سلسلہ مفروضہ کو تعبیر کرنا ہے تو جب کی جگہ او کی قیمتیں قوت نامندرج کرو اور

۱ - ص کی جگہ ک فرض کرو تو

$$۱ ص = ۱ ص + ح ص + ح ص + \dots + ح ص + ۱ ص$$

$$۱ ص - ح ص = ح ص - ح ص + \dots + ح ص - ح ص + ۱ ص$$

اب دو سلسلہ سندسیہ حاصل ہوئے اسلئے

$$۱ ص = ۱ ص - ح ص + ح ص - ح ص + \dots + ح ص - ح ص + ۱ ص$$







(۷) اس سلسلہ کو ن رتوں تک جمع کرو

جب (ن+۱) برجم بر+ جب (ن+۲) برجم بر+ ...

(۸) اس سلسلہ کو ن رتوں تک جمع کرو

جب ۱ سہ جب ۲ سہ + جب ۳ سہ جب ۴ سہ + جب ۵ سہ جب ۶ سہ + ...

اور پھر اسے اس سلسلہ کی ن رتوں کا حاصل جمع دریافت کرو کہ

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n$$

(۹) اس سلسلہ کو ن رتوں تک جمع کرو

جب ۱ بر جب ۲ بر + جب ۳ بر جب ۴ بر + جب ۵ بر جب ۶ بر + ...

۱۰ مثال سے ۱۶ مثال تک جو سلسلے لکھے ہیں ان کے لائنیاں رتوں کا حاصل جمع دریافت کرو

(۱۰) جم بر + جم ۲ بر + جم ۳ بر + جم ۴ بر + جم ۵ بر + ...

(۱۱) جب ۱ - جب ۲ + جب ۳ - جب ۴ + جب ۵ - ...

(۱۲) ۱ - جب ۲ + جم ۳ - جب ۴ + جم ۵ - ...

(۱۳) ۲ جم بر + ۳ جم ۲ بر + ۴ جم ۳ بر + ۵ جم ۴ بر + ...

(۱۴) جب ۱ بر جم ۲ بر + جب ۲ بر جم ۳ بر + جب ۳ بر جم ۴ بر + ...

(۱۵) جب ۱ بر + جب ۲ بر + جب ۳ بر + جب ۴ بر + جب ۵ بر + ...

(۱۶) ثبات کرو کہ جم ۱ بر - ۲ جم ۲ بر + ۳ جم ۳ بر - ... = لوک (۲ جم ۱ بر)

(۱۷) ثبات کرو کہ جم ۱ بر + ۲ جم ۲ بر + ۳ جم ۳ بر + ... = ۱۰ جم ۱۰ بر = ۱۰ لوک (۱۰ جم ۱ بر)

(۱۸) ثبات کرو کہ

لا جب ۱ بر - لا جب ۲ بر + لا جب ۳ بر - ... = تم (۱۰ جم ۱ بر + ۱۰ جم ۲ بر)

(۱۹) ثبات کرو کہ

لوک جم ۱ بر + لوک جم ۲ بر + لوک جم ۳ بر + ... = لوک (۱۰ جم ۱ بر)

۲۰ مثال سے ۲۰ مثال تک جو سلسلے لکھے ہیں ان کی ن رتوں تک جمع کرو



- (۲۰) جب ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۱) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۲) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۳) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۴) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۵) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۶) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۷) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۸) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۲۹) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۳۰) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۳۱) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۳۲) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۳۳) ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...
- (۳۴) ایک ساوی الاضلاع کثیر الاضلاع دائرہ میں بنائی گئی ہے اور محیط کے کسی نقطہ سے وتر اس شکل کے کوفوں تک پہنچے ہیں تو مجموعہ ان تروں کے مربعوں کا دریافت کرو اور مجموعہ اس کے
- چوتھی قوتوں کا بھی معلوم کرو
- (۳۵) دائرے اور مثلثوں میں کیے گئے ہیں جن کے قاعدے اضلاع  $n$  ضلع کے منتظر الاضلاع
- اور ان کے راس اس شکل کے کسی کو نہ واقع ہیں تو ثابت کرو کہ مجموعہ ان دائروں کے رقبوں کا
- ۱ (ج ۱) + ۲ (ج ۲) + ۳ (ج ۳) + ۴ (ج ۴) + ...



تخلف ہیں اور جم  $\frac{۲}{۱}$  کی قیمتیں تطبیق نہیں ہو سکتی

$$\text{اسی طرح } ۱ - ۱ = (۱ - ۱) (۱ + ۱) = ۰$$

اس میں حاصل ضرب  $\frac{۲}{۱}$  اجزاء ضربی کا ہی جوڑ کی متواتر قیمتوں اور  $۲$  و  $۳$  ...  $\frac{۱}{۱}$  ...  $\frac{۱}{۱}$  ...

$$۱ - ۱ = \frac{۲}{۱} \text{ جب } \frac{۲}{۱} \text{ میں رکھنے سے حاصل ہو گا}$$

دو اجزاء ضربی

$$۱ - ۱ = \frac{۲}{۱} \text{ جب } \frac{۲}{۱} \text{ اور } ۱ - ۱ = \frac{۲}{۱} \text{ جب } \frac{۲}{۱}$$

کو باہم ضرب دینے سے ایک جز ضربی درجہ دوم کا یہ پیدا ہوتا ہے کہ

$$(۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} \text{ یعنی } ۱ - ۱ = \frac{۲}{۱}$$

اسے معلوم ہوا کہ جب  $\frac{۲}{۱}$  جفت ہو تو

$$۱ - ۱ = (۱ - ۱) (۱ + ۱) (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + \dots$$

$$\dots [۱ - ۱] \frac{۲}{۱} + [۱ - ۱] \frac{۲}{۱} + \dots (۱)$$

دوم فرض کر کے کہ  $\frac{۲}{۱}$  طاق ہے اب صرف اصلی قیمت مساوات  $۱ = ۱$  کی ہے اور باقی  $\frac{۲}{۱}$  ...

قیمتیں اس طرح حاصل ہوں گیں کہ  $\frac{۲}{۱}$  کی قیمتیں اور  $۲$  و  $۳$  ...  $\frac{۱}{۱}$  متواتر اس جملہ میں رکھیں کہ

$$۱ - ۱ = \frac{۲}{۱} \text{ جب } \frac{۲}{۱}$$

اسے معلوم ہوا کہ  $\frac{۲}{۱}$  طاق ہو

$$۱ - ۱ = (۱ - ۱) (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + \dots$$

$$\dots [۱ - ۱] \frac{۲}{۱} + [۱ - ۱] \frac{۲}{۱} + \dots (۲)$$

(۳۱۵) لہذا اکو اجزاء ضربی میں تحلیل کرو

مساوات  $۱ = ۱$  کی ایک قیمت جملہ  $\frac{۲}{۱} + ۱$  کہ  $\frac{۲}{۱} + ۱$  کہ ہے ضمیمہ رکوی

اسی طرح کہ  $\frac{۲}{۱}$  میں قوت اس جملہ کی بموجب ضابطہ دی ہو کر کے

$$۱ - ۱ = (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + (۱ - ۱) \frac{۲}{۱} + \dots$$



$\frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2}) \dots (1 - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2})$

(۱) ..... جب تک کہ ..... جب تک کہ ..... (۱)

اب پور دفعہ ۳۱ کی (۲) کی دو طرفہ فونکولا۔ ایتھیم کرو اور بعد از ان لد = اکر رکھو

$$\frac{1}{r} = 0 \quad (1-\frac{r}{r_0}) \quad (1-\frac{r}{r_0})^2 \quad \dots \quad (1-\frac{r}{r_0})^{n-1} \quad (1-\frac{r}{r_0})^n$$

(۲) ...

دفعہ ۳۱۵ لی (۱) میں لاء = ۱۷ رطل موجب ان بجٹ ہوگا

۱ =  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n}$  جب  $\frac{1}{n}$  کے  $n$  مرتبہ ضرب کیا جائے گا تو ۱ آئے گا۔ (۳)

$$= \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

(۴) ... جب  $\frac{1}{n}$  کی طرف سے  $\frac{1}{n+1}$  کی طرف سے ...

۱۔ کہیں گراستان سے یہ بات معلوم ہوگی کہ جو نتیجے حاصل ہوئے وہ فی الحقیقت نتائج

مختلف سے مختلف نہ ہونگے مثلاً دفعہ ۱۳ کے (۱) میں طرفین کو الگ ایک قسم کے رول

۱۱۔ اے رکبیں اور حذر نکالیں توں کے بخت ہونے کی حالت میں

تیسواں باب = ۲۲ = ۲۱ جم کے جم کے ... ۲۱ جم کے جم کے ... علم مثلاً جملوں کی تحلیل اجزاء رضی میں  
 حاصل ہوگا اور یہ وہی ہے جو اس دفعہ کے (۱) میں لکھا ہے فقط باہر طر اجزاء رضی مختلف تر  
 لکھے ہوئے ہیں کیونکہ

جم کے = جب ۲۱ = ۲۱ اور جم کے = جب ۲۱ = ۲۱ ...  
 (۳۷) لکھ - لکھ جم بر + اکو اجزاء رضی میں تحلیل کرو

اگر جم بر = ۱ تو ہر جملہ کی صورت (لک - ۱) ہو جائیگی اور اگر جم بر = ۰ تو او اسکی صورت (لک + ۱)  
 ہو جائیگی ان صورتوں میں تحلیل اجزاء کی موافق دفعات ۳۱۲ اور ۳۱۵ کے ہوگی اس کے ان صورتوں کو  
 آئندہ خارج سمجھنا چاہئے اگر ہم یہ کہیں کہ  
 لک - ۲ لک جم بر + ۱ = ۰ اور اسے

لک جم بر ± ۱ (۱ - ۱) جب بر حاصل کریں تو اسے معلوم ہوگا کہ لک مرتبہ کا نزول جم بر ± ۱ (۱ - ۱) جب بر  
 کا ہے اور ن مرتبہ کا نزول اس جملہ جم بر ± ۱ (۱ - ۱) جب بر کے + بر کے  
 اسطرح دریافت ہو سکتا ہے کہ کی صحیح قیمتیں مندرج کریں کیونکہ ضابطہ دی ہوئی ہے یہاں مندرج ہے  
 کہ ن مرتبہ کا صعود آخر جملہ کا جم (۲ رکہ + بر) ± ۱ (۱ - ۱) جب (۲ رکہ + بر) اگر صحیح ہو  
 تو او سکی تحلیل اس جملہ کی طرف ہو سکتی ہے کہ جم ± ۱ (۱ - ۱) جب بر اگر ہم کی متواتر قیمتیں  
 ۰ و ۱ ... ۲ ... ن - ۱ جملہ جم ۲ رکہ ± ۱ (۱ - ۱) جب ۲ رکہ + بر مندرج کریں تو  
 تو ۲ مختلف قیمتیں جملہ کی حاصل ہوں گی اسطرح کہ اگر ر = ۰ اور ر = ۱ سے ایک ہی قیمت  
 جملہ کی حاصل ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

جم ۲ رکہ + بر ± ۱ (۱ - ۱) جب ۲ رکہ + بر = جم ۲ رکہ + بر ± ۱ (۱ - ۱) جب ۲ رکہ + بر  
 اب چونکہ دفعہ ۳۱۵ کے جم ۲ رکہ + بر = جم ۲ رکہ + بر  
 اور جب ۲ رکہ + بر = جب ۲ رکہ + بر انہیں ہو سکتا اور یہ ناممکن ہے کہ  
 جم ۲ رکہ + بر = جم ۲ رکہ + بر اور جب ۲ رکہ + بر = جب ۲ رکہ + بر



واقع میں یہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر  
 اور اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ یہ صورت قانونیہ سر کی سب قیمتوں کے واسطے درست ہی ہو گئی کہ ضرور  
 سر = م کہ + مر اس میں صحیح ثابت یا منفی ہے اور درمیان۔ اور کہ کے واقع ہے  
 تو ہم یہ معلوم کریں گے

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

لیکن جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

اور علیٰ ہذا القیاس

ان قیمتوں میں جب مر اور جب  $(۲ + ۲)$  مر... کو اس صورت قانونیہ میں جو جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا

اجزاء ضربی میں بیان کرتے ہیں مندرجہ کو اور دونوں طرف کو  $(۱ - ۱)$  میں پر تقسیم کرو تو ہم کو مطلوب

صور قانونیہ میں جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا کے واسطے حاصل ہوگی خواہ سر کی کچھ ہی قیمت ہو

جملہ جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا کے تبدیل کرو تو  $n = ۲$  - ۱۔ ا کے تبدیل ہوگا

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

آخر نتیجہ میں سر = کے لکھو تو

$n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

اس میں سر = کے لکھو تو

اور یہ بھی ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر

اب سر کی روایت کم ہو تو اس سے کہ غایت اللہ تھا جب  $n = ۲$  - ۱۔ ا کے حاصل ہوتا ہے کہ

$n = ۲$  - ۱۔ ا جب سر جب  $(۲ + ۲)$  سر جب  $(۲ + ۲)$  سر... جب  $(۲ + ۲)$  سر  $(۲ + ۲)$  سر



یہ صورت قانونیہ بعض اوقات فائدہ مند ہوتی ہیں

یہ صورت قانونیہ بعض اوقات فائدہ مند ہوتی ہیں

(۳۱۹) دفعہ ۳۱۸ کے حوالے میں سر کے مختلف صورتوں میں لکھی جاسکتی ہیں جیسے کہ

جب (۲۸ - ۲۷ + سر) = جب (۲۷ - ۲۸ + سر) = جب (۲۷ - ۲۸ - سر)

جب (۲۸ - ۲۷ - سر) = جب (۲۷ - ۲۸ - سر) = جب (۲۷ - ۲۸ - سر)

اور عالیٰ نذر القصاص

ابا دو سر خضر فی کو با ہم اور ایک اخر خضر فی کو با ہم ضرب دینے سے یکو حاصل ہوتا ہے کہ  
جب ن سر = ۲ - ا ج ب سر (ج ب ۲ سر) (ج ب ۲ سر) (ج ب ۲ سر)

اب یہ ضروری ہے کہ ان صورتوں کا جدا جدا امتحان کرین خمین ن جفت اور طاق ہو  
اول فرض کرو کہ ن جفت ہی تو جزئی جیب (ن سہ + سر) یعنی جسم سطح واقع ہوگا کہ کوئی  
جزئی اوسیں ضرب نہیں کہا گیا اسے معلوم ہوگا کہ ن جفت ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ  
جیب ن سر = ۲ - ل جیب سر جسم (جیب ۲ سہ - جیب سر) (جیب ۲ سہ - جیب سر) ...

تیسواں باب ۲۲۵ علم متعلق جلوں کی تحلیل اجزاء ضربی میں

جم ن سر = ۱ - ۱ جم سر (جب ۲ - جب ۱ سر) (جب ۲ - جب ۱ سر) ...  
 [جب (ن - ۱) - جب ۲ - جب ۱ سر] [جب (ن - ۲) - جب ۱ سر]

(۳۲۰) جب بر اور جم بر کو اجزاء ضربی میں تحلیل کرو  
 فرض کرو کہ ن سر = بر اور ن طاق ہے تو جو جب دفعہ گذشتہ کے

جب بر = ۱ - ۱ - ۱ جب ۱ (جب ۲ - جب ۱ سر) (جب ۲ - جب ۱ سر) ...  
 طرفین مساوات کو جب ۱ یقین کر دو اور بر کو بیرونیات گہٹاؤ تو اس سے کہ جب بر جب کے  
 کے غایت الانتہا ہے اس واسطے ہکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن = ۱ - ۱ - ۱ جب ۲ - جب ۱ سر ...

اسی طرح تقسیم

جب بر = ۱ - ۱ - ۱ جب ۱ (جب ۲ - جب ۱ سر) (جب ۲ - جب ۱ سر)

اب فرض کرو کہ ن بیرونیات زیادہ ہوتا ہے تو اس سے کہ = ۱ - ۱ - ۱ تو غایت الانتہا  
 جب ۱ کی کہ ہے اور غایت الانتہا جب ۱ کی کہ ہے اور علی القیاس

پس آخر کار

جب بر = ۱ - ۱ - ۱ (جب ۲ - جب ۱ سر) (جب ۲ - جب ۱ سر) ...

اگر ن کو حجت فرض کریں تو بھی یہی نتائج حاصل ہوتے

اور اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

جم بر = ۱ - ۱ - ۱ (جب ۲ - جب ۱ سر) (جب ۲ - جب ۱ سر)

(۳۲۱) جس طرح کہ لا - لا جم بر + ا کو دفعہ ۳ میں تحلیل اجزاء ضربی میں کیا تھا اور جس طرح  
 لا - لا جم بر + ط کو تحلیل اجزاء ضربی میں کر سکتے ہیں اور آخر جملہ کا ہر ایک جز ضربی درجہ

دویم کا اس صورت لا - لا ط جم ۲ - ۲ + ط کا آئینہ ہر ایک صحیح سی اور تمام  
 اجزاء اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں کہ رکی متواتر قیمتیں ۰ واد ۰۰۰۲ - ن - ۱ مثبت ہوں

اور جم ۲ (ن - ۱) کہ + س = جم ۲ کہ - س اور جم ۲ (ن - ۲) کہ + س = جم ۲ کہ - س

اور علیٰ ہذا القیاس سطح تمام اجزاء ضربی دریافت ہو جائیگی اگر ہم  
لا - لا ط جم ۲ کہ ± س ط آ لیں اور دو فوائد معلوم کیا استعمال کریں اور اگر ن کی  
متواتر قیمتیں ۱ اور ۲ ... لیں مقرر کریں اگر طاق ہوئے تک قیمتیں مقرر کریں  
دوسری صورت میں ر = س کے ہو تو ہم کوئی ایک جز ضربی لا - لا ط جم ۲ کہ + س ط  
اسکے ہیں

اب فرض کرو کہ لا = ۴۱ س اور ط = ۱ - س تو جملہ

(۱ + س) ۲ - (۱ - س) ۲ جم ۲ س + (۱ - س) ۲ (س)

کی تحلیل اجزاء ضربی میں کرنی بیگی اور صورت عامہ اجزاء ضربی کی یہ ہوگی

(۱ + س) ۲ - (۱ - س) ۲ جم ۲ کہ ± س + (۱ - س) ۲ (س)

یعنی ۲ (۱ + س) ۲ - (۱ - س) ۲ جم ۲ کہ ± س

یعنی ۲ جب ۲ کہ ± س (۱ + س) ۲ م (۱ - س) ۲ کہ ± س

اب فرض کرو کہ س بیرونہایت زیادہ ہوتا ہے تو

(۱ + س) ۲ = س (۱ - س) ۲ (س = ج) (جبر تعالہ دفعہ ۵۵۲)

اور نیز س م (۱ - س) ۲ کہ ± س = (۱ - س) ۲ کہ ± س

اب د = ۰ کے رکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

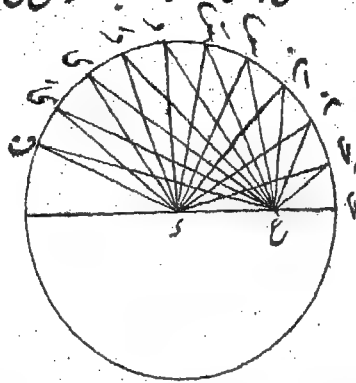
۲ جب ۲ = ۲ جب ۲ کہ ± س ۲ جب ۲ کہ ± س

پس آخر کو

ی - ۲ جم ۲ س + س = ۲ جب ۲ (۱ + س) ۲ (۱ - س) ۲ (۱ + س) ۲ (۱ - س) ۲

اور ثالین اس قبیل کی جزئیات اور کلیات میں موجود ہیں

تیسواں باب ۲۲۷ علم شمس جملوں کی تحلیل اجزاء ضربی میں  
(۳۲۲) خاصیت دائرہ کی جودی مولو رصاحب کے تحقیق کی



فرض کرو کہ مرکز دائرہ کا ہی اور مرکز کروی دائرہ کے اندر اوپر واقع ہر محیط کو نقطہ سے شروع  
کر کے ان برابر قوسوں بس اور س د اور دی ... لیکن ہم کو د اور ع کے تقاطع قسیم بس و د ...

جیسے ملاؤ فرض کرو کہ ع ب = بر تو  
ع ب = ۲ ع ب . د ب = جم ب + د ب = ع ب . ع س = ع د ... ان اجزاء ضربی تک

دلیل ہے کہ ع ب = ع ب - ۲ ع ب . د ب = جم ب + د ب

ع س = ع ب = ع ب - ۲ ع ب . د ب = جم ب + د ب + ع س

ع د = ع ب - ۲ ع ب . د ب = جم ب + د ب + ع د

اوپر نصف قطر د اور د س اور د س ابسین برابر ہیں  
دفعات ۳۱۷ اور ۳۲۱ میں تمام رقموں کا حاصل ضرب ان مساواتوں کی بائیں طرف کا ہے

ع ب = ۲ ع ب . د ب = جم ب + د ب

اسے دعویٰ ثابت ہے

اور اس خاص صورت میں جب ع محیط پر واقع ہو تو

د ب = جم ب + د ب = ع ب . ع س = ع د ... ان اجزاء ضربی تک

تیسواں باب ۲۱۷ علم ثقلی جملوں کی تحلیل اجزاء ضربی میں

خواص دائرہ کی جو کس نے تحقیق کی  
وہ دی مولور کی خاصیت دائرہ کی خاص صورتیں ہیں  
ترج کو خارج کر کے دائرہ سے اپر لاؤ اگر ضرورت ہو

اور فرض کرو کہ  $ا ب = ب س = س ج$  اور  $ب = ا ب$  کہ پس یہ ہیکو حاصل ہو گا کہ  
( $ا ب - ب س$ ) =  $ا ب$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک

اسیو  $ا ب$  سے  $ب س$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک  
اب فرض کرو کہ تو سین  $ا ب$  اور  $ب س$  ... کی  $ا$  اور  $ب$  ... پر

تخصیف کی جائیں تو جو مسئلہ ابھی ثابت ہوا ہے اسکی موافق  
 $ا ب$  سے  $ب س$  =  $ا ب$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک

اسیو  $ا ب$  سے  $ب س$  =  $ا ب$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک  
 $ا ب$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک

(۳۴۳) علم ثقل کی کتابوں میں یہی دستور ہے کہ دفعہ ۳ کے نتائج کا اثبات اس طرح  
کلیا کہ تین طرح سے لکھا ہے مگر یہ اثبات قابل اطمینان نہیں ہے

چونکہ جب برضا اوس صورتیں ہو جاتی ہے کہ  $ا ب = ب س$  یا  $ا ب = س ج$  ... اسے یہ نتیجہ نکلتا  
کہ جب  $ا ب$  اور  $ب س$  اور  $س ج$  اور  $ا ب$  اور  $ب س$  اور  $س ج$  ... پر تقسیم ہوتا ہے

اسیو  $ا ب$  سے  $ب س$  =  $ا ب$  =  $ب س$  =  $س ج$  ... ان اجزاء ضربی تک  
جب  $ا ب = ب س$  (بر - کہ) (بر + کہ) (بر - کہ) (بر + کہ) (بر - کہ) (بر + کہ)

اسمین  $ا$  کوئی ایسی مقدار ہی جسکو  $ب$  کے گچہ لگاؤ نہیں پس ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ  
جب  $ا ب = ب س$  (بر - کہ) (بر + کہ) (بر - کہ) (بر + کہ) (بر - کہ) (بر + کہ)

اسمین ابھی ایسی مقدار ہی کہ جسکو لگاؤ  $ا$  سے نہیں ہے طرفین کو بر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ  
بر = ... تو اس سبب یہ نتیجہ حاصل ہو گا



اور سیطرہ سے لوگ جمع ہو گئے۔ کہ کو دریافت کر سکتے ہیں (ایسی کا علم مثلث درمیان)  
 (۳۴۵) اب اس رفر (۱-۱) کے عقدی کہوئے ہیں اس کتاب کے آخر حصہ میں اس کی بجائی  
 ذکر کیا ہے اس رفر کے استعمال کی کیفیت یہ ہے کہ اس کی استعانت سے بہت سیلچ حاصل کرتے ہیں  
 اور یہہ دیکھتے ہیں کہ سیلچ کس حد تک درست اور صحیح ہیں نقطہ اس تجربہ پر استعمال اس رفر کا  
 موقوف ہی اب یہہ دریافت کرنا کہ تیلچ کہاں تک درست ہیں ان ترکیبوں پر موقوف ہیں  
 رفر (۱-۱) کے استعمال سے جو تیلچ حاصل ہوں ان کو اور ترکیب سے استنباط کریں مثلاً قیمتیں  
 جو جبکہ بر اور جم بر کی دفعہ ۲۶۹ میں دریافت ہوئی ہیں وہ استقرار سے ثابت ہیں  
 اس مثال ذیل سے یہ معلوم ہو گا کہ بعض صورتوں میں کس طرح رفر (۱-۱) کو استعمال میں لائیں اور  
 اثبات درست اور ٹھیک رہتا ہے

فرض کرو کہ مثبت صحیح ہو اور جم بر کو اضلاع بر کی جو بلہام میں پہلانا منظور ہو تو ہم عمال سطح  
 کریں جس طرح کہ دفعہ ۲ میں کیا تھا اور فرض کرو کہ لا بجائی ی بر (۱-۱) کے ہے اب معلوم  

$$(Y + Y) = (Y + Y) + (Y + Y) + \dots + (Y + Y) + (Y + Y) + (Y + Y) + \dots$$

$$= \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right]$$

کی تمام قیمتوں کے واسطے یہ صحیح ہیں اگر تمام عمال غور کیے جائیں تو مساوات کے دونوں اکران  
 متطابق ہونگے اس واسطے ہم بر کے بجائی ی بر کہہ سکتے ہیں اور یہ نتیجہ یہ بھی ہو گا کہ  
 کہ نم (۱-۱) =  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right] - 1 = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right] - 1$

۳-۱ جن بر = جم بر + جم (۲-۲) بر + ... + جم (۲-۲) بر + ... + جم (۲-۲) بر + ...  
 ایک مسئلہ بر فیصدی اور گن کے علم مثلث میں ثابت ہوا ہے کہ یہ بخوبی ثابت ہوتا ہے  
 کہ رفر (۱-۱) کے استعمال سے جو اثبات حاصل ہوئے ہیں وہ بالکل متشکا ہوتی ہیں اور  
 انہیں سیطرہ کا ظل نہیں ہوتا اور اس مسئلہ کا اس کتاب میں لکھنا مناسب نہیں معلوم ہوتا





(۷) ثابت کرو کہ جب  $\frac{1}{2}$  برجم ہے = جب  $\frac{1}{2}$  ہے جب کہ جب  $\frac{1}{2}$  ہے

(۸) ثابت کرو کہ

(تم  $\frac{1}{2}$  - قطا ہے) مس ہے = (مس ہے تم  $\frac{1}{2}$  - قطا ہے) مم  $\frac{1}{2}$  ہے

(۹) ثابت کرو کہ مس  $\frac{1}{2}$  بر - مس  $\frac{1}{2}$  بر - مس  $\frac{1}{2}$  بر = مس  $\frac{1}{2}$  بر - مس  $\frac{1}{2}$  بر

(۱۰) اس مساوات مس  $\frac{1}{2}$  لدا + مم  $\frac{1}{2}$  لدا = مم  $\frac{1}{2}$  لدا - مم  $\frac{1}{2}$  لدا سے لاکو دریافت کرو

(۱۱) محیط دائرہ کا  $\frac{1}{2}$  برابر حصوں میں نقاط اربعہ وق ..... وغیرہ تقسیم ہوا ہے

اور نقاط اربعہ وق ..... سے مناس نکالے گئے ہیں اور اوپر عمود لدا اور دب اور دس ..... نقطہ رطوف قطر لدا سے نکالے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

لدا + دب + دس + ..... = ۳۰ (نصف قطر)

(۱۲) اس ب ایک ربعہ دائرہ ہی اربعہ اور وق اور دس ..... قوسین بہ ترتیب

پایا مقدر کے ہیں اور ہر ایک اب کے کم ہی اور اوٹکا مجموعہ دو چند اب کے برابر ہے نصف قطر

سے اور س ق اور س ر کچی گئی ہیں اور نقطہ لدا سے جو ماس نکالا جا کے اسے نقاط

سے اور ق اور ریر ملتے ہیں اور اربعہ اور لان اور دس سے ایک مثلث بنیٹا ہی اسکی ممکن

ہونی کی شرائط دریافت کرو اور وق کی غایت الانتہا کم کی اور اربعہ کی غایت الانتہا زیادتی

کی دریافت کرو ثابت کرو کہ تمام ایسی مثلثوں میں نصف قطر دواثر اندرونی اور بیرونی

کے تناسب معکوس ہوتے ہیں

(۱۳) اب س مثلث قائم الزاویہ ہی اور س زاویہ قائمہ ہے بس کو دائرہ اندرونی نقطہ

ی برس کرتا ہی اور دائرہ جواب اور اضلاع محدودہ س لدا اور س بس کو مس کرتا ہوا

کچا جا کے اس سے نقطہ پرتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر ی ف ملا یا جا تو مثلث فی س

نصف مثلث اب س کا ہے

(۱۴) ایک مثلث کی کو تون سے خطوط خارجی زاویہ کو تخفیف کرتے ہوئے کچے گئے ہیں لدا

رقبہ اصل مثلث کا اور ص منی مثلث کا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ص} = \frac{1}{2} \text{ص} \text{ تم} = \frac{1}{2} \text{تم} = \frac{1}{2} \text{تم}$$

(۱۵) اب س و ایک خط افقی ہے د کے اوپر ایک مقام ہے اور اب اور ب معلوم  
اور ب کے محاذی ایک ہی زاویہ اگر اب = ط اور ب س = ص تو ثابت کرو کہ ارتفاع مشاہدہ  
کرنیوالے کے مقام کا د کے اوپر

$$\frac{2 \text{ط ص} (\text{ط} + \text{ص}) \text{س س}}{(\text{ط} - \text{ص}) (\text{ط} + \text{ص}) \text{س س}}$$

(۱۶) اگر ایک قوس رقبہ دائرہ سے بڑی ہو اور زمین ایک نقطہ مقرر کیا جائے اور اس نقطہ  
و خطوط ایک طرف قوس میں: اور دوسرا عمود وتر پر نکالا جائے اور اسی پر ختم ہو تو ثابت کرو  
کہ مجموعہ ان دو خطوط کا چھوٹا وتر قوس سے ہوگا

(۱۷) ایک بادل کا زاویہ ارتفاع ص ہے اور ایک تالاب میں اس بادل کا عکس پتا بھی  
زاویہ پتی ص ہے اور یہ ارتفاع مشاہدہ کرنیوالی آنکھ کا تالاب پر تو ارتفاع بادل کا

$$\frac{\text{ص جب} (\text{ص} + \text{س})}{\text{جب} (\text{ص} - \text{س})}$$

(۱۸) سطح سمندر سے ص فیٹ ایک ٹیلے اور اوسپر دو پہر کو ایک شخص کھڑا ہوا ہے  
اور مشاہدہ کرتا ہے کہ زاویہ ارتفاع بادل کا نصف النہار پر ہے اور اور سطح آب پر  
سایہ پڑتا ہے اوسکا زاویہ ص ہے تو ثابت کرو کہ اگر آفتاب کا ارتفاع مقام مشاہدہ پر ہو  
تو بادل کی بلندی سطح آب پر

$$\frac{\text{ص جب} (\text{ص} + \text{س})}{\text{ص جب} (\text{ص} - \text{س})}$$

اور مشاہدہ کرنیوالے کے پس پشت آفتاب ہے

جواباً

$$f(4) = \frac{1}{7}, f(7) = \frac{2}{22}, \frac{2}{22}(5)$$

(۱۰) نسبت ۵ اور ۱۴۲ کی ہے

(۵)  $\frac{50}{100}$  اور  $\frac{25}{50}$  (۴)  $\frac{40}{100}$  اور  $\frac{20}{50}$  (۶)  $\frac{30}{100}$  اور  $\frac{15}{50}$

باب سوم: بعض ابر = کچھ (۷) بر = ۰۔ تاکہ (۸) بر =  $\frac{1}{4}$  تاکہ

$$i_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad (11) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (12) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (13)$$

باب چهارم صفحه ۱۵۵ و ۱۵۶ جزاویہ ۱۲۵ کی ہے (۲) و ۱۵۷ جزاویہ ۱۳۳ کی (۳) و ۱۵۸ جزاویہ ۱۳۴ کی

۱۰۰ کی ہے (۴) وی جزاویہ ۳۰ کی ہے (۵) ۵۰ و ۶۰ کی ہے ۷۰ و ۸۰ کی ہے ۹۰ و ۱۰۰ کی ہے

[illegible]

(۴) و ا -  $\frac{1}{n}$  و ا +  $\frac{1}{n}$  و  $\frac{1}{n}$  و  $\frac{\sqrt{n}}{n}$  و  $\frac{1}{n}$  و  $\frac{1}{n}$

(۹) جب بر = - حجم بر ایوان سطح بر = ۱۳۵ و غیرہ

(۱) حجم بر =  $\frac{1}{6}$  استوا سطح بر = ۲۰ در و غیره (۱۸) نہیں

ب. صحیح و مفید (۱) ک + ک (۲)  $(\frac{1}{r} + 0.2)$  ک (۳) ک ۲

(۱)  $\frac{r}{\sqrt{e}} \pm k$  (۵)  $k \pm e$  (۶)  $k \pm \frac{r}{\sqrt{e}}$  (۷)  $k \pm e$

(۸)  $r_1$  کو  $\pm \frac{1}{p}$  (۹)  $1$  کو  $\pm$  (۱۰)  $1$  کو  $\pm \frac{1}{q}$  (۱۱)  $1$  کو  $\pm \frac{1}{r}$  (۱۲)  $1$  کو  $\pm \frac{1}{s}$

بیشتر منفی (۳۱) بر = ن که  $\pm \frac{۱}{۲}$  (۳۸)  $\frac{۵}{۲}$  = ن که  $\frac{۳}{۲}$  = (ن +  $\frac{۱}{۲}$ ) که

(۳) ۳ بر ۱ که ما  $m = 2$  ان که  $\pm \frac{1}{2}$  (۳۳) بر  $\frac{1}{2}$  = ان که  $\pm \frac{1}{2}$

(۳) بر = ن کہ بیان کہ  $\pm \frac{1}{4}$  (۳۶) آبر =  $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$  کہ یابر =  $\pm \frac{1}{4}$  کہ

(۳۷) اگر  $n$  کو یا بر =  $2n \pm k$  کے (۳۸) اگر  $n$  کو + (-)  $k$

$$(۳۹) \text{ بر } = (\frac{1}{r} + n) \text{ که یا } \frac{n}{k} = (1 - \frac{1}{k}) \cdot \frac{k}{(n)} \text{ بر } + \frac{1}{k} = n \pm \frac{1}{k}$$

باب ششم ۲۶ صفحه (۲) حجم  $\frac{1}{2} = \sqrt[n]{(1+j)^n} - \sqrt[n]{(1-j)^n}$

$$(۳) \quad r \text{ جیب } \frac{1}{r} = - \sqrt{(1 + \text{جیب})} - \sqrt{(1 - \text{جیب})} \quad (۴) \quad r \text{ کرہ } + \frac{1}{r} \text{ کرہ اور } r \text{ کرہ} + \frac{1}{r} \text{ کرہ}$$

$$(5) 2\text{ کھ اور } 2\text{ کھ} + \frac{1}{2}\text{ کھ} (4) 2\text{ کھ} - \frac{1}{2}\text{ کھ اور } 2\text{ کھ} + \frac{1}{2}\text{ کھ} (10) \frac{1}{2}$$

(۱۱)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (۱۲) جب  $1 \pm \frac{5}{2}$  جم  $1 \pm \frac{5}{2}$  یا جب  $1 \pm \frac{5}{2}$  اور جم  $1 \pm \frac{5}{2}$

$$\frac{1}{r} = (r_1) \cdot N(r_2) \pm (r_4) \cdot r - \overline{r_3}(12)$$

ماہ ششم صفحہ ۱۶ مثال ۲۰ مثال مستنبط ہو سکتی ہے اس طرح کہ اگر  $\frac{1}{p}$  (کے - د) ہے

طبیعی ہو سکتی ہے

جم لا جم = حاسه جم

سید محمد علی = سید احمد احمد - جب سید احمد احمد = محمد احمد احمد

۱- حم لکڑی باغیکہ (۳۰) مسکر - مسرے

فصله - خامسه - حمزه - حمزه - مس سینه - مس سینه

[illegible]

$$\frac{\text{احمد} - \text{محمد} = \text{جاسم} - \text{محمد} = \text{احمد} - \text{محمد}}{\text{احمد} - \text{محمد} = \text{جاسم} - \text{محمد} = \text{احمد} - \text{محمد}}$$

$$\frac{\text{جمہ - جمہ}}{\text{جمہ + جمہ}}$$

۱- حمصہ کے اندر سے اس کے  $\frac{1}{2}$  حصہ کو نکال کر باقی حصہ کو

(۱) خرم صه و درایت کرو (۲) من ۱/۴ هوس همی جبهیه،

مس ۱۱۰ = (جم + ح) ± (ا + جب + ج + ر)



۷۱۱.۹

جوابات: کہ یہ اس طرح ہے کہ اگر مختلف صورتیں ماننا کر کے مختلف جواب نکالتے

یہ بات یاد رہی ہے کہ اگر کسی کو دو صورتیں دی جائیں جن میں سے ایک کو چاہئے اور دوسری کو نہیں چاہئے تو اسے یہ حاصل ہوتا ہے کہ  $2^n$  کے  $\pm$  اور  $n$  کے  $+$   $(-1)^n$  کے اب ایک صورت کو  
 اگر ہم دوسری صورت میں لکھیں کہ حجم  $(2^n - 1) =$  حجم  $n$

اسی طرح کے - ۲ بر = ۲۲ کہ ۲۲ بر

اسی طرح کہے۔  $r = n$  کہ  $\pm$  بر  
دسواں باب صفحہ ۹۴ (۱)  $\frac{r}{n} = \frac{(2)}{9} = \frac{(3)}{3}$  (۳)  $(3)$  و  $2 - 0 = \frac{1}{3}$   
 $5 = \dots + \frac{1}{3} - \dots$

$$S = \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \quad (1) \quad 1-3(4) \quad 5-4(n)$$

(12)  $u_2 = 0$   $u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   $(13)$   $u_1 = 0$   $u_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   $(14)$   $u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   $u_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

(۱۳)  $\Delta = \pm \frac{\mu}{\delta}$  یا  $\pm \frac{\mu}{\delta} (10)$  حجم (لد +) سه = حجم  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$

(۱۳) لده = آن لده ۵۰ یان ۵۰ لده  
(۱۴) لده = قط (سه) - یا - ۲ حم ۲ - قط سه (۱۴) جب ۲ سه = جب ۳ سه

(۱۶) لہ = وط (سے) - پہلے - اب ہم

(۱۷) حب سے کہ = (محبوب) جب یہ اسے مس کرے حاصل ہوتا ہے

(۱۴) جب  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (۱۵) جب  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(۱۹) بر = مک +  $\frac{7}{8}$  ما (۵=۱) ر =  $\frac{1}{4}$  ک  
 (۲۰) حمر = . باجپ کے = یاجم  $\frac{50}{2}$  - (۲۲)  $\frac{14}{14}$

(۲۰) جم بر = ۰ یا جب = ۲  
(۲۱) جب = ۲  
(۲۲) جب = ۲  
(۲۳) جب = ۲  
(۲۴) جب = ۲  
(۲۵) جب = ۲  
(۲۶) جب = ۲  
(۲۷) جب = ۲  
(۲۸) جب = ۲  
(۲۹) جب = ۲  
(۳۰) جب = ۲

(۲۳)  $n = 2$  (۲۴)  $\frac{1}{2}$

اس کے حکم سے تواتر کیے۔ لا اور کے + لا لکھو

[illegible]

(۳۴) دفعہ ۱۲ میں اس کے ساتھ ج + س + م  
+ ۱/۲ (سب سے پہلے) + ۱/۲ (میں سے پہلے)

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{ab}{a+b}$$

(۳) مم + مم = جج - جج = حح

(ب) نمرنگی سے حاصل ہوتا ہے کہ

(۳۷) اگر  $a + b + c = 180^\circ$  تو معلوم ہے کہ  $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$

۱۴۱۔ اوس میں سے کچھ یاد ہی تو مجموعہ ان زادوں کے جو کہ محض زور و کار کا اور اچھا نہ

اسو سطحے اگر مکوید مطلوب ہو کہ مجموعہ حوب تمام کے مجزورن کا برابر واحد ہو تو ایک یا زیادہ  
 حادہ زالیوں کے گنٹانے چاہئے تو اونکا مجموعہ ۱۸۰ سے کم ہوگا  
 (۳۸) قیمت جب (ا + ب + س) جو دفعہ ۱۱۳ میں لکھی ہوئی او کے یہہ استخراج ہوتا کہ

$$\text{جب ا + جب ب + جب س} = \text{جب (ا + ب + س)}$$

$$= \text{جب ا (ا - جم ب جم س) + جب ب (ا - جم ا جم س) + جب س (ا - جم ا جم ب)}$$

$$+ \text{جب ا جب ب جب س}$$

ہر یک رقم اس جگہ کی ثبت ہی  
 (۳۹) جی ہے (۴۰) صفر (۴۱) وہ (ا - جم بر) (ا + ۲ جم بر) کے صفر سے  
 بڑے ہونے پر موقوف ہے

بارہواں باب صفحہ (۳) مس بر =  $\frac{\text{ح س} \pm \text{ح بر}}{\text{جم س} \pm \text{جم ح}}$

(۴) او  $\frac{1}{2}$  (۵) مم ہے - جم بر = جب بر (۶)  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

(۷) ط = ص (۸) ط + ص  $\pm$  ح = بر (۱۱) ط + ص - ح = ۲

(۱۲) ل + ک = ط (۱ +  $\frac{1}{2}$ ) (۱۳) مم ح =  $\frac{1}{2}$  - ط (۱۴)  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$

(۱۵) ص = ط - ۲ طرح جم بر + ح (۱۹) (م ن)  $\frac{1}{2}$  [م + ن] = ۱

(۲۰)  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  = ۱

(۲۹) جب بر جب بر = جب س جب س

ایسوا سطحے مم جب ہے - مم جب ہے =  $\frac{\text{ح س} \pm \text{ح ح}}{\text{جم س} \pm \text{جم ح}}$

اور جب بر = مم ہے + جم ح ایسوا سطحے

ایسوا سطحے مم ہے - ۱ =  $\frac{1}{2}$  [۱ - مم جب ہے (مم ہے + جم ح) جب ح]

(۳۰) ن در میان - ۲ اور - ۱ ا ا اور ۲ کے در میان واقع ہوتا ہے

(۳۱) بر حسب دفعہ ۱۱ کے لہ مس ۱ اور ۲ = مس ب اور ۱ = مس س میں

ا + ب + س = ۱۸۰ ایسوا سطحے ا + ب + س = ۱۸۰ اور

جوابات

از باب صوفی

509.

مس + لا + مس = اب + مس = اس = اس + اس = بس اس اسے نتیجہ مطلوب حاصل

(۳۲) وجب ح = جیبی = - جیب لاجرم - - جم لاجب و

= - وجب طحیم - وجب صرحم لایا حبیطا حم = - جبین - جبین صرحم لایا

اور جب طہ جب و = جب ص جب لا مجذور کمر و اور جمع کرو تو

جیب ط = جیب ص + جیب ح + ۲ جیب ص جیب ح <sup>سطح</sup> جم که است

حجم =  $\frac{\text{حاصل ضرب اعداد}}{\text{حاصل جمع اعداد}}$

**۴۔ حب ص حب ح**

اور اس طرح حجم و اور حجمی دریافت ہونے کے ہمیں

(۳۷) بالعموم جبا (ا+ب) = جبا ا + جبا ب + جبا ب (ا+ب) (۱)

اور صورت حال میں جی 1 + جی 2 = جی 3

اگر ب ب بڑا۔ اُسے پتو اور ب + س پر جہ اول بڑا۔ اُسے ہوگا اور اگر ب + ب ہوگا

۹۔ سے ہو تو جیب (ا+ب) بموجب (ا) کے ٹرا جیب ا+جیب ب سے ہوگا یعنی

محبوب (۲) کے بڑا یہ نسبت حجم سے کہ ہوگا

اسی واسطے کہ بڑا بہ نسبت ۹۰ - ۱۰۰ کے ہوگا

سیدنا ابوبکر صدیق

(۵) فرض کرو کہ کچھ = سیدیں شلت کے زاویے اسہ اور سم اور اسہ و نشت

ضلع کی مجموعہ ضلع = حب اسہ + حب لم اسہ + حب اسہ

$$\frac{m_1 \omega_1}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} = \frac{m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_2^2 + m_1 \omega_1 \omega_2 + m_2 \omega_1 \omega_2}$$

خود را نام نشو

(۴) محمد زکریا + محمد اسد = طاہر + سبط محمد = طاہر

طب اسیرا امیر طب



(۲۱) جب بر + جب سر = ۲ جب (بر + سر) ایسا کہ جم سر = ۲ جم بر

ایسا کہ جم بر = ۲ جم سر = ۳ ح = ۲ جب ہے

ایسا کہ (۱ - جب ہے) (۱ - جب ہے) = ۹ جب ہے جب ہے

ایسا کہ ۱ جب ہے جب ہے = ۱ - جب ہے - ح ہے

ایسا کہ ۱۶ جب ہے جب ہے = ۲ - ۲ جب ہے - ۲ جب ہے = جم بر + جم سر

یا جم سر = ط + ط - ط اور ط = ط + ط

ایسا کہ جم بر = ط + ط + ط = ط + ط = ط - ط

اور سیطرہ جم سر = ط - ط = ط

(۲۲) آٹھویں باب ۲۰ اور ۲۱ مثالوں سے نقل کی گئی ہیں

(۲۰) ہکو بیہ ثابت کرنا (ط + ط - ط) (ط + ط - ط) (ط + ط - ط) چھوٹا

بہ نسبت ط + ط ط کے ہوگا اگر ط = ط کی صورت متشبی ہی ان مقداروں کے مجزور کرے

سے ظاہر ہوتا ہے (ط - ط) (ط - ط) (ط - ط) (ط - ط) (ط - ط) (ط - ط)

چھوٹا بہ نسبت ط + ط ط کے ہے اور دائیں ہر یک ضربی چھوٹا ہی اپنی نظیر کے ضربی سے جو

بائیں طرف ہی

چودھواں باب نصفہ (۱) ۱ = ۳۰ ما ۱۵۰ (۲) ۳۰ و ۹۰

(۳) ۲۵ و ۹۰ و ۲۵ (۴) مثلث ناممکن ہے

(۵) ب = ۹۰ س = ۲ ط = ۱۴ (۶) ۵ + ۲ + ۵ = ۱۲ (۷) ۱۳

(۸) دفعہ ۲۳ سے ہکو بیہ حاصل ہوتا ہے ط + ط = ۲ ط جم ۱ اور

ط ط = ط - ط (۹) ط جب ۱ جم ۱

(۱۱) نہیں اور مثلث قائم الزاویہ ہے (۱۲) جب سر = ط (ط ط) جب ۱/۲

اور نیز ط + ط = ط = ح + ح = جم ۱/۲ (۱ - ط) ط

جب ۱/۲



لا = ط بس بر اور ط + لا = ص مس (بر + ل)

(۱۱) ۱۱۰ (۱۱۵) فیٹ شاہدہ کرنوالی کی آنکھ کا ارتفاع زمین سے خیال نہ کرو

(۱۲) ۴۰ (۱۳) ارتفاع ۶۰ (۱۴) فیٹ فاصلہ ۴۰ (۱۵) ۴۰ (۱۶) ۴۰

(۱۸) ۴۰ + ۱ (۱۹) میل فی گھنٹہ (۲۰) فرض کرو کہ صفہ ارتفاع اونچی پہاڑ کا ہی اور صفہ اونچے

پہاڑ کا ہے تو

$$\frac{(1+2)}{(2-1)} = \frac{\text{جب سے جب صفہ اور صفہ}}{\text{صفہ مم سے صفہ}} = \frac{\text{صفہ مم سے صفہ}}{\text{صفہ مم سے صفہ}}$$

(۲۳) ۱۱۰ (۲۵) فیٹ ب = ۹۰ یا ۱۲۰ اور تقریباً غلطی ۴ ہے

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{جب سے جب صفہ جب (سے + صفہ)}}{\text{جب سے جب صفہ جب (سے + صفہ)}}$$

(۲۹) (ط + ۲ ط) ط (سے + ط) (۲) فرض کرو کہ دو نقطہ دس اور دس زاویہ

دس ب کے درمیان واقع ہیں اور دس = ط اور دس = س

تو مثلث دس د اور ب س د سے یکساں دریافت ہوگا کہ

$$\text{دس} = \frac{\text{ط ب (سے + س)}}{\text{ط ب (سے + س)}}$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ س سے معلوم ہو گیا اور اس سے جب س اور ج س معلوم ہو گئی پس س کا یہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{\text{ط ب (سے + س)}}{\text{ط ب (سے + س)}} = \frac{\text{ط ب (سے + س)}}{\text{ط ب (سے + س)}}$$

اور اسی قبل کا جملہ دس کے واسطے سے اور صفہ کے رفتون میں دریافت ہوگا

تو دس = دس + دس سے ط دریافت ہوگا اور اسلئے لا = ط ۴۰ کے ہوگا

یا اس طرح کہ مثلث س باقی کے س سے س سے (اے س سے)

$$\frac{\text{ط ب (سے + س)}}{\text{ط ب (سے + س)}} = \frac{\text{ط ب (سے + س)}}{\text{ط ب (سے + س)}}$$

اور س ب س د = س سے (اے س سے) دریافت کرو

تو دس د = س سے - س اور دس = دس دس د = دس (سے + س)

پس اس طرح دس دریافت ہوگا اور اس سے س دریافت ہوگا

(۳۱) ۴۰ (۳۲) ۴۰ (۳۳) ۴۰ (۳۴) ۴۰ (۳۵) ۴۰



$$\frac{\text{طاب}}{\text{نور}} = \frac{\text{نور}}{\text{طاب}} = \left( \frac{\text{جم ص}}{\text{جم ص}} + \frac{\text{جم ص}}{\text{جم ص}} \right)$$

$$\frac{\text{نور}}{\text{طاب}} = \left( \frac{\text{جم ص}}{\text{جم ص}} + \frac{\text{جم ص}}{\text{جم ص}} \right)$$

طاب کی قیمت پر تقسیم کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہو جائیگا

(۱۷) اگر ع ق = ط اور ق ر = ص تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{ص ق}}{\text{ط ق}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط ص}} + \frac{\text{ط ص}}{\text{ط ص}} = 1$$

ص کی خفیف تبدیلی سے جو تبدل ص ق میں پیدا ہوگا وہ دریافت ہو سکتا ہے

ابھار سوال باب ۱۱ صفحہ (۲) ۱ (۴)  $\frac{1}{5}$  (۱۸) لا =  $\frac{1}{2}$  (۲۵-۲۶)

$$(۱۹) لا = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط ص}} = 1 \text{ یا } 0 = لا (۲۱) \frac{1}{2} \pm 1$$

$$(۲۲) لا = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ یا } 1 \pm 1 = لا (۲۳)$$

$$(۲۷) لا = ط یا ط - ط + 1 = لا (۲۸)$$

$$لا = 2 \text{ یا } 2 = لا (۳۰) لا = 1 \text{ اور } 2$$

$$(۳۷) لا = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \text{ یا } (ن + م + ن) + 1 = لا (۳۸)$$

$$(۳۹) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۴۰)$$

بائیسواں باب صفحہ

$$(۱) جب ۱ = لا (۱-جم ۲) کو کام میں لاؤ (۲) جب ۱ = لا (۳) جب ۱ = لا$$

$$(۴) کو کام میں لاؤ (۵) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۶)$$

$$(۷) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۸) لا = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(۹) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۱۰) لا = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(۱۱) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۱۲) لا = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(۱۳) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۱۴) لا = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(۱۵) لا = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ یا } 1 + 1 = لا (۱۶) لا = 1 + 1 + 1 = 3$$

- (۲۲) جب  $\frac{1}{2}$  بر - جب  $\frac{1}{2}$  بر - (۲۳) مم بر - مم بر - (ن + ۱) بر  
 (۲۴) مم (ر + ک) (مس (ن + ۱) (ر + ک) - مس (ر + ک) [ (۲۵) ک - مس (ن + ۱) (۲۶) مس (ن + ۱) (۲۷) جم (ر + ک) - جم (ر + ک) (۲۸)  $\frac{1}{2}$  قم بر [مس (ن + ر) بر - مس بر]  
 (۲۹)  $\frac{1}{2}$  قم بر [قط  $\frac{1}{2}$  بر - قط  $\frac{1}{2}$  بر] (۳۰)  $\frac{1}{2}$  مم بر - مم بر - (۳۱) تم اس - تم اس (۳۲) جم بر - جب بر مم ن بر  
 (۳۳) لوک ۲ جب ۲ بر - لوک ۲ جب ۲ بر

تیسواں باب ۱۴ صفحہ (۱) جب ن = ۲ تو مجموعہ اول سلسلہ کا کچھ ہی  
 اور مجموعہ دوسرے سلسلہ کا کچھ ہی اور جب ن = ۴ تو مجموعہ اول سلسلہ کا کچھ ہی اور  
 مجموعہ دوسرے سلسلہ کا کچھ ہی اور لوک ۲ بر - اور لوک ۲ بر کے صورت میں جو دو فعل  
 ۲۷ اور ۳۲ کے قوائے بریں لکھی ہیں اور ان سے اور کیساں قوتوں کے امتثال کو مانتی  
 لکھنے سے ہی یہ نتائج حاصل ہو جائیں گے فقط